ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Programme de colles

Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 19 **17/03/25 - 21/03/24**

Programme :

Groupes :
- Structure de groupe, loi produit, groupe produit ;
- Sous-groupe, intersection de sous-groupes, sous-groupe engendré par un élément, sous-groupe engendré par une partie, sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$;
- Morphisme de groupes, image directe et réciproque par un morphisme de groupe, noyau et image, caractérisation d'un morphisme injectif, isomorphisme et automorphismes ;
- Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, relation de congruence, structure de groupe abélien,
- Groupes monogènes et cycliques, cyclicité et générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, description des groupes monogènes ;
- Ordre d'un élément, $x^m = e \iff n|m$, $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/o(x)\mathbb{Z}$, cas d'un groupe fini ;
- Groupe symétrique, support, commutation de permutations à supports disjoints, cycle, transposition, ordre et conjugué d'un cycle, décomposition d'un p-cyle comme produit de $p-1$ transpositions, décomposition d'une permutation comme produit d'au plus $n-1$ transpositions, décomposition d'une permutation comme produit de cycles à supports disjoints, signature comme unique morphisme surjectif de $(\mathrm{S}_n, \circ)$ sur $(\{1, -1\}, \times)$, groupe alterné, signature d'un cycle.

Anneaux :
- Structure d'anneau, calcul dans un anneau, intégrité, sous-anneau, groupe des inversibles, anneau produit, corps, sous-corps ;
- Morphisme d'anneaux, noyau et image, isomorphisme d'anneaux ;
- Idéal d'un anneau commutatif, le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal, somme finie d'idéaux, intersection d'idéaux, idéal engendré, caractérisation d'un corps comme anneau ayant pour seuls idéaux les idéaux triviaux, idéaux de $\mathbb{Z}$, notions de divisibilité écrites en termes d'idéaux.

Questions de cours : (avec preuve)

1. Pour $a \in \mathrm{G}$, $\langle a \rangle = \left\{a^k, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et caractère abélien ;
2. Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$;
3. Description et cardinal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
4. Structure de groupe abélien de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$;
5. Cyclicité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et générateurs ;
6. Description des groupes monogènes ;
7. Si x est d'ordre fini égal à n, alors $x^m = e \iff n|m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$;
8. Si x est d'ordre fini, alors $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/o(x)\mathbb{Z}$;
9. Soit $(\mathrm{G}, \star)$ groupe fini d'ordre n, alors $x^n = e$ et $o(x)|n$ pour tout $x \in \mathrm{G}$ (preuve dans le cas commutatif, preuve dans le cas général pour le groupe $+$) ;
10. Conjugaison de cycles ;
11. Toute permutation de S_n peut se décomposer comme produit d'au plus $n-1$ transpositions ;
12. Noyau d'un morphisme d'un anneau commutatif vers un anneau ;
13. Un anneau commutatif non nul est un corps si et seulement ses seuls idéaux sont triviaux.