Préparation à l'interrogation n°21

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$;
2. Développement asymptotique à 3 termes de $\sqrt{1+n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = \dots$

2 Formules

1. Taylor reste intégral
2. $x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

3 Trigonométrie

1. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
2. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

4 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ avec $\alpha \neq 1$;
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$;
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$;

5 Intégrales à paramètres

Continuité, classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^k$ sous l'intégrale.

6 Suites et séries de fonctions

1. Théorème de convergence dominée ;
2. Théorème d'intégration terme à terme ;
3. Théorème de double limite pour une série de fonctions ;
4. Théorème de classe $\mathscr{C}^1$ pour une série de fonctions.

7 Techniques

Soient a, b réels non tous nuls. On a

$$a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\,[\alpha\cos t + \beta\sin t] \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Comme $\alpha^2+\beta^2 = 1$, il existe θ réel tel que $\alpha = \cos\theta$ et $\beta = \sin\theta$. Ainsi

$$a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\theta)$$

Application : Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b réels pour que $f : t \mapsto a\cos t + b\sin t$ ait une limite en $+\infty$.
Si a, b sont non tous nuls, avec l'expression précédemment obtenue, comme la fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$, alors la fonction f non plus. On conclut que la fonction f admet une limite en $+\infty$ si et seulement si $a = b = 0$.

8 Exercice type

Soit $\lambda > 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que les solutions de $z'' + \lambda z = 0$ soient 2π-périodiques.

Corrigé Les solutions sont de la forme $t \mapsto a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\sin(\sqrt{\lambda}t)$ avec a, b réels, solutions qu'on peut aussi présenter sous la forme $t \mapsto \mathrm{A}\cos(\sqrt{\lambda}t - \theta)$ avec $\mathrm{A} = \sqrt{a^2+b^2}$ et θ réel tel que $a + \mathrm{i}b = \mathrm{A}e^{\mathrm{i}\theta}$. Si λ est le carré d'un entier, alors les solutions sont 2π-périodiques. Supposons $f : t \mapsto \mathrm{A}\cos(\sqrt{\lambda}t - \theta)$ avec $\mathrm{A} \neq 0$ (cas trivial sinon) 2π-périodique. Alors, on a

$$f\left(\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\right) = f\left(\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}} + 2\pi\right) \iff 1 = \cos(2\pi\sqrt{\lambda}) \iff 2\pi\sqrt{\lambda} \in 2\pi\mathbb{N} \iff \sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$$

Ainsi $\boxed{\text{On a la } 2\pi\text{-périodicité des solutions si et seulement si } \lambda \text{ est le carré d'un entier.}}$

9 Exercice type

L'ensemble $$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$$
est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Corrigé : On a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ et contenant 1. Soient (a,b) et (c,d) dans $\mathbb{Q}^2$. On a

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

ce qui prouve que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau du corps $(\mathbb{R},+,\times)$ ce qui en fait donc un anneau commutatif. Soit $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $a + b\sqrt{2} \neq 0$. En multipliant par la quantité conjuguée, on trouve

$$(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$$

Si $a^2 - 2b^2 = 0$, alors il vient $a - b\sqrt{2} = 0$ ce qui prouve que $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est faux. On a donc $a^2 - 2b^2 \neq 0$ puis

$$(a+b\sqrt{2})\left(\frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\right) = 1$$

ce qui prouve que tout élément non nul de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est inversible. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \text{ est un sous-corps de } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On dit que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est une *extension algébrique* de $\mathbb{Q}$ de degré 2 car c'est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension 2, une base étant donnée par $(1,\sqrt{2})$. On peut construire cette extension en tant qu'anneau quotient $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2-2)$ où la relation d'équivalence sur $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ est définie pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]^2$ par $\mathrm{P} - \mathrm{Q} \in (\mathrm{X}^2-2)$ (idéal engendré par X^2-2).

10 Questions de cours

Anneaux, arithmétique, développements en série entière usuels, graphes usuels.