ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°82

Exercice 1 (*)

Soit A un anneau. On définit le *centre* de A noté Z(A) par

$$\mathrm{Z(A)} = \{x \in \mathrm{A} \mid \forall a \in \mathrm{A} \qquad ax = xa\}$$

Montrer que Z(A) est un sous-anneau de A.

Exercice 2 (*)

Décrire les morphismes d'anneaux $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tels que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (*)

Un *morphisme de corps* est un morphisme d'anneaux entre deux corps (commutatifs, conformément au programme). Montrer qu'un tel morphisme est injectif.

Exercice 4 (*)

Un corps $(\mathbb{K}, \times, +)$ est dit *algébriquement clos* si tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré supérieur ou égal à un admet une racine dans $\mathbb{K}$.

1. Déterminer parmi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les corps algébriquement clos.
2. Un corps fini peut-il être algébriquement clos ?

Exercice 5 (**)

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ muni des opérations + et ×.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Déterminer le plus petit corps inclus dans $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Exercice 6 (**)

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 7 (**)

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. Montrons qu'un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de degré n entier admet au plus n racines distinctes.

Exercice 8 (**)

Montrer que les anneaux $(\mathbb{Z}^n, +, \times)$ avec n entier non nul sont deux à deux non isomorphes.

Exercice 9 (**)

Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau non commutatif et $a \in \mathrm{A}$ qui possède un inverse à droite et un seul. Montrer que a possède un inverse à gauche.

Exercice 10 (**)

Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau tel que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{A}^2 \qquad (xy)^2 = x^2 y^2$$

1. Établir $\qquad \forall (x, y) \in \mathrm{A}^2 \qquad xyx = x^2 y = y x^2$
2. En déduire que l'anneau $(\mathrm{A}, +, \times)$ est commutatif.