ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°83

Exercice 1 (**)

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $(\mathrm{A}, +, \times)$. On définit le *radical* de I noté R(I) par

$$\mathrm{R}(\mathrm{I}) = \left\{x \in \mathrm{A} \mid \exists k \in \mathbb{N}^* \ : \ x^k \in \mathrm{I}\right\}$$

1. Montrer que R(I) est un idéal de A contenant I.
2. On suppose $\mathrm{A} = \mathbb{Z}$. Déterminer l'ensemble des entiers n non nuls tels que $\mathrm{R}(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (***)

On note
$$\mathbb{D} = \left\{\frac{p}{10^n},\ (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$$
l'ensemble des nombres décimaux.

1. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Montrer que les idéaux de $(\mathbb{D}, +, \times)$ sont de la forme $a\mathbb{D}$ avec $a \in \mathbb{D}$.

Exercice 3 (***)

Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau intègre. On suppose que cet anneau n'a qu'un nombre fini d'idéaux. Montrer que $(\mathrm{A}, +, \times)$ est un corps.

Exercice 4 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré. On pose

$$\mathrm{A} = \{a + b\sqrt{n}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} \quad \text{et} \quad \mathrm{C} = \{\alpha + \beta\sqrt{n}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2\}$$

1. Montrer que $(\mathrm{A}, +, \times)$ est un anneau et que C est son corps des fractions.
2. Déterminer tous les automorphismes du corps $(\mathrm{C}, +, \times)$.

Exercice 5 (***)

Un idéal I d'un anneau commutatif $(\mathrm{A}, +, \times)$ est dit *premier* si

$$\forall x, y \in \mathrm{A} \quad xy \in \mathrm{I} \Longrightarrow x \in \mathrm{I} \text{ ou } y \in \mathrm{I}$$

1. Décrire les idéaux premiers de $(\mathbb{Z}, +, \times)$.
2. Montrer que si l'anneau $(\mathrm{A}, +, \times)$ est commutatif et si tous ses idéaux sont premiers, alors $(\mathrm{A}, +, \times)$ est un corps.

Exercice 6 (****)

Déterminer les endomorphismes du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Exercice 7 (***)

Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau.

1. Montrer que $f_{\mathrm{A}} : \mathbb{Z} \to \mathrm{A}, k \mapsto k1_{\mathrm{A}}$ est le seul morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A. Montrer qu'il existe $k_{\mathrm{A}} \in \mathbb{N}$ tel que Ker $f_{\mathrm{A}} = k_{\mathrm{A}}\mathbb{Z}$.
2. On suppose que A est un corps. Montrer que $k_{\mathrm{A}} = 0$ ou que k_{A} est premier. Étudier la réciproque.
   On suppose que A est un corps fini et on admet que $|\mathrm{A}| = p^n$ avec p premier et $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}, x \mapsto x^p$. Montrer que φ est un automorphisme de A. Déterminer l'ordre de φ dans $(\mathrm{Aut}(\mathrm{A}), \circ)$.