ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°84

Exercice 1 (**)

Un idéal I d'un anneau commutatif A est dit *premier* si

$$\forall x, y \in \mathrm{A} \quad xy \in \mathrm{I} \Longrightarrow x \in \mathrm{I} \text{ ou } y \in \mathrm{I}$$

1. Décrire les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.
2. Soit A un anneau commutatif, I idéal premier et J, K des idéaux. Montrer que

$$\mathrm{J} \cap \mathrm{K} = \mathrm{I} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{J} = \mathrm{I} \quad \text{ou} \quad \mathrm{K} = \mathrm{I}$$

Indications : 1. Étudier $p\mathbb{Z}$ avec p composé et p premier.
2. Si $\mathrm{J} \cap \mathrm{K} = \mathrm{I}$, supposer $\mathrm{K} \neq \mathrm{I}$ et montrer $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.

Exercice 2 (***)

Un anneau A est dit *de Boole* si tout élément $x \in \mathrm{A}$ vérifie $x^2 = x$. On considère A un anneau de Boole.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{A}$, on a $x + x = 0_{\mathrm{A}}$ et que A est commutatif.
2. Soit $(x, y) \in \mathrm{A}^2$. Calculer $xy(x+y)$. En déduire que si A possède plus que deux éléments, il n'est pas intègre.

Indications : 1. Pour $(x, y) \in \mathrm{A}^2$, considérer $(-x)^2$ puis $(x+y)^2$.
2. Pour la non-intégrité de A, choisir $x = 1_{\mathrm{A}}$ et $y \notin \{0_{\mathrm{A}}, 1_{\mathrm{A}}\}$.

Exercice 3 (****)

On note $\mathrm{A} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ muni des opérations $(+, \times)$.

1. Montrer que A est un anneau commutatif.
2. Justifier que pour $x \in \mathrm{A}$, l'écriture $x = a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ est unique.
3. Pour $x = a + b\sqrt{2} \in \mathrm{A}$, on note $\mathrm{N}(x) = a^2 - 2b^2$. Vérifier que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{A}^2 \qquad \mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$$

4. Montrer que $\qquad x \in \mathrm{U(A)} \iff \mathrm{N}(x) \in \{\pm 1\}$
5. Montrer que $\qquad \min \mathrm{U(A)} \cap \,]\,1\,;+\infty\,[\, = 1 + \sqrt{2}$
6. En déduire $\quad x \in \mathrm{U(A)} \cap \,]\,0\,;+\infty\,[\quad \Longrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z} \mid x = (1+\sqrt{2})^n$
7. Décrire $\mathrm{U(A)}$.

Indications : 3. Poser $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}], a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$. Vérifier que l'application est bien définie puis écrire N à l'aide de φ.
4. Observer que pour $x \in \mathrm{U(A)}$, on a $\mathrm{N}(x) \in \mathrm{U}(\mathbb{Z})$. Pour la réciproque, utiliser l'écriture de N avec φ.
5. Pour $x \in \mathrm{U(A)} \cap \,]\,1\,;+\infty\,[$, disjoncter les cas $x = a - b\sqrt{2}$, $x = -a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et en déduire une contradiction portant sur $\mathrm{N}(x)$ ou $-\mathrm{N}(x)$.
6. Justifier l'égalité $]\,0\,;+\infty\,[\; = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[\,(1+\sqrt{2})^n\,;(1+\sqrt{2})^{n+1}\,\right[$ puis pour $x \in \mathrm{U(A)} \cap \,]\,1\,;+\infty\,[$, discuter de $x(1+\sqrt{2})^{-n}$ avec n entier relatif bien choisi.

Exercice 4 (****)

Soient $\alpha > \beta$ les racines de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1$. On pose $\mathrm{A} = \{x + \alpha y, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ et l'application $\sigma : \mathrm{A} \to \mathbb{R}, x + \alpha y \mapsto x + \beta y$.

1. Montrer que A est un anneau et que σ est un automorphisme de A. Expliciter σ^{-1}.
2. On note U l'ensemble des inversibles de A et $\mathrm{N} : \mathrm{A} \to \mathbb{R}, z \mapsto z\sigma(z)$.

   (a) Pour $z \in \mathrm{A}$, montrer $\qquad z \in \mathrm{U} \iff |\mathrm{N}(z)| = 1$

   (b) Soit $\mathrm{V} = \mathrm{U} \cap \,]\,1\,;+\infty\,[$, montrer que si $x + \alpha y \in \mathrm{V}$, alors $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 1$.

   (c) En déduire $\qquad \mathrm{V} = \{\alpha^n, n \in \mathbb{N}^*\}$

Indications : 1. Vérifier que A est sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$. Justifier que l'application σ est bien définie en prouvant l'unicité de l'écriture d'un élément de A puis déterminer σ^2 en considérant $\alpha\beta$.
2.(a) Observer que $\mathrm{N}(u) \in \mathbb{Z}$ pour $u \in \mathrm{U}$.
2.(b) Pour $u \in \mathrm{V}$, supposer u de la forme $u = x - \alpha y$ puis $u = -x + \alpha y$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ et aboutir à une contradiction sur la valeur de $\mathrm{N}(u)$.
2.(c) Déterminer α comme élément remarquable de V puis comparer $\{\alpha^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ et V.