ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°73

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis calculer sa différentielle.

Corrigé : On a f linéaire d'où

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f = \mathrm{Tr}}$$

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^3)$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis calculer sa différentielle.

Corrigé : L'application f est polynomiale en les coefficients de la matrice d'où

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})}$$

Soit $(\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2$. Il n'y a aucune raison *a priori* pour que M et H commutent d'où

$$(\mathrm{M}+\mathrm{H})^3 = \mathrm{M}^3 + \mathrm{HM}^2 + \mathrm{MHM} + \mathrm{M}^2\mathrm{H} + \mathrm{H}^2\mathrm{M} + \mathrm{HMH} + \mathrm{MH}^2 + \mathrm{H}^3$$

La trace est linéaire donc C-lipschitzienne avec $\mathrm{C} \geqslant 0$ et avec un choix de norme sous multiplicative, la norme $\|\cdot\|_1$ par exemple, il vient

$$|\mathrm{Tr}\,(\mathrm{H}^2\mathrm{M} + \mathrm{HMH} + \mathrm{MH}^2 + \mathrm{H}^3)| \leqslant \mathrm{C}\,(3\|\mathrm{H}\|^2\|\mathrm{M}\| + \|\mathrm{H}\|^3) = \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

En utilisant la propriété fondamentale de la trace, on obtient donc

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) = f(\mathrm{M}) + \ell(\mathrm{H}) + \mathrm{o}(\mathrm{H}) \quad \text{avec} \quad \ell(\mathrm{H}) = 3\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^2\mathrm{H})$$

et ℓ est linéaire par linéarité du produit et de la trace. On conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = 3\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^2\mathrm{H})}$$

Exercice 3 (**)

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ différentiable vérifiant $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}$. Montrer que f est linéaire.

Corrigé : On a clairement $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$ en prenant $\lambda = 0$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $tx \xrightarrow[t \to 0]{} 0_\mathrm{E}$, on a pour t réel

$$tf(x) = f(tx) \underset{t \to 0}{=} f(0) + \mathrm{d}f(0) \cdot (tx) + \mathrm{o}(t) = t\,\mathrm{d}f(0) \cdot x + \mathrm{o}(t)$$

d'où
$$f(x) \underset{t \to 0}{=} \mathrm{d}f(0) \cdot x + \mathrm{o}(1)$$

et faisant tendre $t \to 0$
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \mathrm{d}f(0) \cdot x$$

On conclut
$$\boxed{f = \mathrm{d}f(0)}$$

Exercice 4 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. On définit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathrm{P}) = \int_0^1 \sin(\mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle.

Corrigé : Les normes sur E sont équivalentes. On choisira le moment venu celle qui nous arrange. Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall (a, h) \in \mathbb{R}^2 \qquad |\sin(a + h) - \sin(a) - h\cos(a)| \leqslant \frac{h^2}{2}$$

d'où $\qquad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad |\sin(\mathrm{P}(t) + \mathrm{H}(t)) - \sin(\mathrm{P}(t)) - \mathrm{H}(t)\cos(\mathrm{P}(t))| \leqslant \dfrac{\mathrm{H}(t)^2}{2}$

On munit E de la norme $\|\cdot\|_2$. Après intégration et par inégalité triangulaire, il vient

$$\left| f(\mathrm{P} + \mathrm{H}) - f(\mathrm{P}) - \int_0^1 \mathrm{H}(t)\cos(\mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{H}(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|\mathrm{H}\|_2^2$$

On a donc

$$\forall \mathrm{H} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathrm{P} + \mathrm{H}) = f(\mathrm{P}) + \ell(\mathrm{H}) + \mathrm{o}(\mathrm{H}) \quad \text{avec} \quad \ell(\mathrm{H}) = \int_0^1 \mathrm{H}(t)\cos(\mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t$$

L'application ℓ est linéaire par linéarité du produit et de l'intégrale. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est différentiable avec } \mathrm{d}f(\mathrm{P}) \cdot \mathrm{H} = \int_0^1 \mathrm{H}(t)\cos(\mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t \text{ pour } (\mathrm{P}, \mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2.}$$

Remarque : En écrivant $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ et en identifiant $f(\mathrm{P}) = f(a_0, \ldots, a_n)$, on a

$$f(a_0, \ldots, a_n) = \int_0^1 \sin\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)\,\mathrm{d}t$$

En considérant cette écriture comme une intégrale à paramètre, on peut justifier l'existence et la continuité des dérivées partielles avec

$$\forall i \in [\![\,0\,;\,n\,]\!] \qquad \frac{\partial f}{\partial a_i}(\mathrm{P}) = \int_0^1 t^i \cos\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)\,\mathrm{d}t$$

On retrouve le même résultat que précédemment mais la rédaction est plus fastidieuse.

Exercice 5 (**)

Soit E euclidien. Déterminer en quels points l'application $\|\cdot\|$ est différentiable et préciser le gradient en ces points.

Corrigé : Soit $u \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{\|tu\|}{t} = \frac{|t|\,\|u\|}{t}$$

quantité qui n'admet pas de limite pour $t \to 0$ ce qui prouve que la norme n'admet de dérivée selon aucun vecteur en 0_E et n'est par conséquent pas différentiable en 0_E. Soit $x \neq 0_\mathrm{E}$. Pour $h \in \mathrm{E}$, on a

$$\|x+h\| = \sqrt{\|x\|^2 + 2\langle x,h\rangle + \|h\|^2} = \|x\|\sqrt{1 + \frac{2\langle x,h\rangle}{\|x\|^2} + \mathrm{o}(h)}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle x,h\rangle \leqslant \|x\|\|h\|$ d'où $\langle x,h\rangle \xrightarrow[h\to 0_{\mathrm{E}}]{} 0$ et $\mathrm{o}(\langle x,h\rangle) = \mathrm{o}(h)$ d'où

$$\sqrt{1 + \frac{2\langle x,h\rangle}{\|x\|^2} + \mathrm{o}(h)} = 1 + \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|^2} + \mathrm{o}(h)$$

et par suite
$$\|x+h\| = \|x\| + \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|} + \mathrm{o}(h)$$

On conclut

$$\boxed{\text{Une norme euclidienne est différentiable sur } \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} \text{ avec } \nabla\|x\| = \frac{x}{\|x\|} \text{ pour } x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}.}$$

Variante : Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on écrit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec les x_i coordonnées de x dans $\mathscr{B}$. Ainsi

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Comme $x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ est polynomiale donc différentiable et $u \mapsto \sqrt{u}$ dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, on en déduit la différentiabilité de la norme sur $\mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ puis

$$\forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \partial_i\|x\| = \frac{x_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}$$

D'où
$$\forall x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} \qquad \nabla\|x\| = \sum_{i=1}^{n} \partial_i\|x\| e_i = \frac{x}{\|x\|}$$

Remarque : En toute rigueur, on devrait noter $\partial_i\|\cdot\|(x)$ et $\nabla\|\cdot\|(x)$ pour $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ et $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$.

Exercice 6 (*)

Soit E euclidien, $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E},\mathrm{E})$ telle que $\mathrm{d}f(x) \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x-y\|$$

Corrigé : Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \mathrm{d}f(x + t(y-x)) \cdot (y-x)\,\mathrm{d}t$$

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant \int_0^1 \|\mathrm{d}f(x + t(y-x)) \cdot (y-x)\|\,\mathrm{d}t$$

Et comme $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ pour tout $a \in \mathrm{E}$, on conclut

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x-y\|}$$

Exercice 7 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $h = (h_1, \ldots, h_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = f(x + th) = f(x_1 + th_1, \ldots, x_n + th_n)$$

Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $g'(t)$ pour t réel.

Corrigé : On a $t \mapsto x + th$ de classe $\mathscr{C}^1$ par propriété sur les fonctions vectorielles. Par composition, la fonction $g : f \circ (t \mapsto x + th)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec par dérivation composée

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad g'(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(x + th)}$$

Exercice 8 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$ et g définie sur $]\,0\,;+\infty\,[\times \mathbb{R}$ par

$$\forall (r, \theta) \in\,]\,0\,;+\infty\,[\times \mathbb{R} \qquad g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

1. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[\times \mathbb{R}$.
2. Exprimer les dérivées partielle de g en fonction de celles de f.
3. Exprimer les dérivées partielles de f évaluées en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ en fonction de celles de g.

Corrigé : 1. Notons $\mathrm{U} = \,]\,0\,;+\infty\,[\times\mathbb{R}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$. Posons $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. L'application φ est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque ses fonctions coordonnées sont composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et comme $g = f \circ \varphi$, on conclut

$$\boxed{g \in \mathscr{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})}$$

2. Par dérivation composée, on trouve

$$\boxed{\forall (r, \theta) \in \mathrm{U} \qquad \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin(\theta))}$$

et
$$\boxed{\forall (r, \theta) \in \mathrm{U} \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin(\theta))}$$

3. Pour $(r, \theta) \in \mathrm{U}$, on a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} = \mathrm{R}(-\theta) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{pmatrix}$$

d'où
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{pmatrix} = \mathrm{R}(\theta) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix}$$

Autrement dit

$$\boxed{\forall (r, \theta) \in \mathrm{U} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)}$$

et
$$\boxed{\forall (r, \theta) \in \mathrm{U} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)}$$

Exercice 9 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Quelles relations existe-t-il entre les dérivées partielles dans les cas suivants :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = f(y,x)$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = f(x+y, xy)$

Corrigé : 1. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x,y)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(y,x)\right] = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[f(x,y)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(y,x)\right] = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$$

Ainsi
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)}$$

2. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x,y)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x+y,xy)\right] = \frac{\partial f}{\partial x}(x+y,xy) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x+y,xy)$$

et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[f(x,y)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[f(x+y,xy)\right] = \frac{\partial f}{\partial x}(x+y,xy) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x+y,xy)$$

Ainsi
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x+y,xy) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x+y,xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x+y,xy) + x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x+y,xy) \end{cases}}$$

Exercice 10 (*)

Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Corrigé : Soit Φ une primitive de φ. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \Phi(y) - \Phi(x)$$

Or, les applications $(x,y) \mapsto \Phi(y)$ et $(x,y) \mapsto \Phi(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisqu'elles sont composées de Φ de classe $\mathscr{C}^1$ avec respectivement $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ polynomiales donc de classe $\mathscr{C}^1$. Par composition, on conclut

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\varphi(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(y)}$$

Exercice 11 (**)

Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières et le caractère $\mathscr{C}^1$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ -\sin(x) & \text{sinon} \end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Corrigé : 1. On a $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$ en tant que fonction rationnelle bien définie. Par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad |f(x,y) - f(0,0)| \leqslant x^2 \quad \text{et} \quad x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Par encadrement, il s'ensuit que $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{x^4}{x^3} = x \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

d'où l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$ qui sont nulles. Par dérivation, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3(x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par inégalité triangulaire, il vient

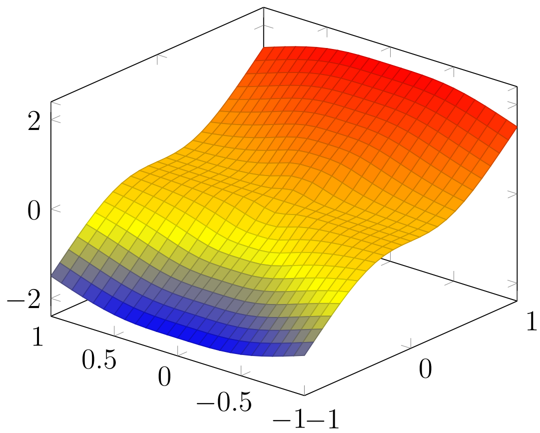
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| \leqslant 2|x| + 4|x| = 6|x| \quad \text{et} \quad 6|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Toujours par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2x^4 y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \left| \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| \leqslant 2|y| \quad \text{et} \quad 2|y| \xrightarrow[y\to 0]{} 0$

Ainsi $$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$



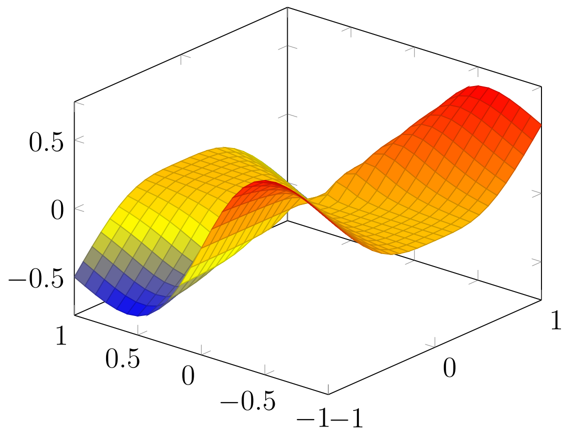


FIGURE 1 – Graphes de $z = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $z = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

2. On a $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$ en tant que fonction rationnelle bien définie. Puis

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \qquad |f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^4 y}{x^4 + y^2} \right| \leqslant |y| \quad \text{et} \quad |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. Puis

$$\forall x \neq 0 \qquad \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \neq 0 \qquad \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

Par suite, la fonction f admet des dérivées partielles en x et y en $(0,0)$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Par dérivation, il vient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4}{(x^4+y^2)^2}\,[x^4 - y^2]$$

D'où
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 1 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

On conclut
$$\boxed{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \smallsetminus \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

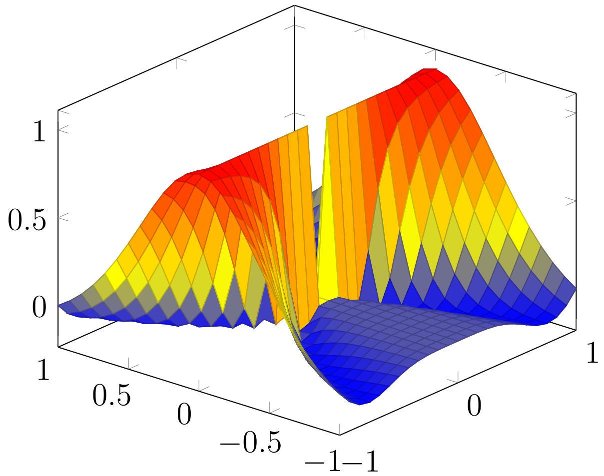


FIGURE 2 – Graphe de $z = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Remarque : Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3y^3}{(x^4+y^2)^2}$$

Avec l'équivalence

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x^2 - |y|)^2 \geqslant 0 \iff x^4 + y^2 \geqslant 2x^2\,|y|$$

il vient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| = \underbrace{\frac{2x^2\,|y|}{x^4+y^2}}_{\leqslant 1} \frac{2\,|x|\,y^2}{x^4+y^2} \leqslant 2\,|x|\,\frac{y^2}{x^4+y^2} \leqslant 2\,|x|$$

D'où la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Il faut donc impérativement examiner $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pour conclure négativement. Intuitivement, comme l'exposant en y est plus faible que celui en x au dénominateur, le cas le plus défavorable est celui de la dérivée en partielle en y d'où la pertinence de commencer par cette dérivée partielle.

3. Par trigonométrie, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

On pose
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 \end{cases}$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Or, on a
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = -\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Par composition
$$\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

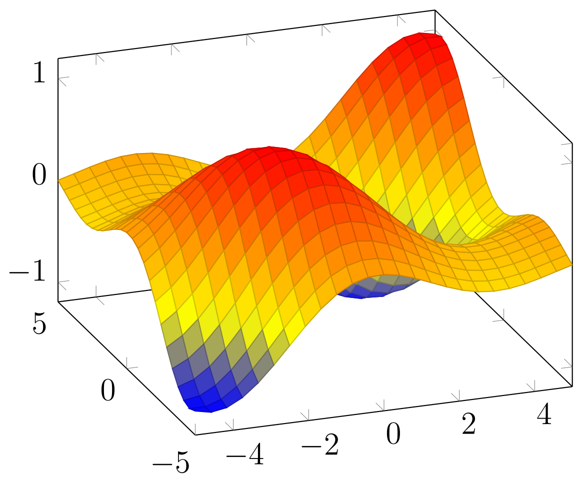


FIGURE 3 – Graphe de $z = f(x,y)$

4. On a $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \qquad |f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy|}{|x| + |y|} \quad \text{et} \quad |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où la continuité de f en $(0,0)$. Puis, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t - 0} = \frac{t^2}{t\,|t|} = \frac{t}{|t|}$$

qui n'admet pas de limite finie finie en 0. Or, si f est différentiable en $(0,0)$, alors elle admet une dérivée selon $(1,1)$ en ce point ce que contredit l'observation précédente. On conclut

$$\boxed{f \notin \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

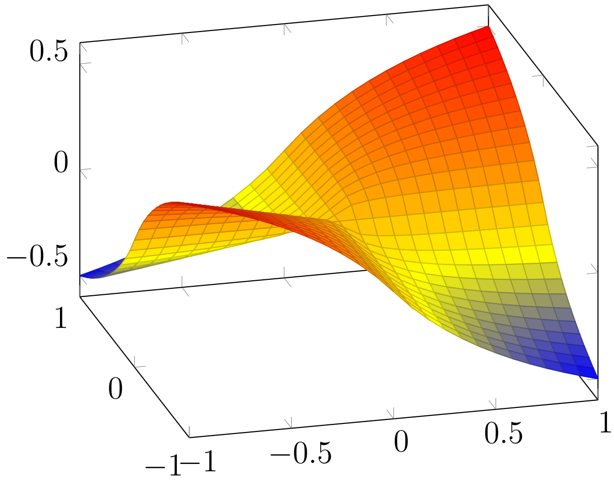


FIGURE 4 – Graphe de $z = f(x, y)$

Exercice 12 (**)

Soit E euclidien, $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$ et $a \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \frac{1}{2}\langle u(x), x\rangle - \langle a, x\rangle$$

1. Montrer que f est différentiable et préciser sa différentielle.
2. Étudier les extremums de f.

Corrigé : 1. Pour $(x, h) \in \mathrm{E}^2$, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}\langle u(x+h), x+h\rangle - \langle a, x+h\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle u(x), x\rangle + \frac{1}{2}(\langle u(x), h\rangle + \langle u(h), x\rangle) + \frac{1}{2}\langle u(h), h\rangle - \langle a, x\rangle - \langle a, h\rangle \end{aligned}$$

Comme $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$, on a $\langle u(x), h\rangle = \langle u(h), x\rangle$ pour tout $(x, h) \in \mathrm{E}^2$. Puis, l'application u est linéaire sur un espace de dimension finie donc C-lipschitzienne avec $\mathrm{C} \geqslant 0$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u(h), h\rangle| \leqslant \|u(h)\|\|h\| \leqslant \mathrm{C}\|h\|^2 = \mathrm{o}(h)$$

Puis $$\forall (x, h) \in \mathrm{E}^2 \qquad f(x+h) = f(x) + \langle u(x) - a, h\rangle + \mathrm{o}(h)$$

Ainsi $\boxed{\text{L'application } f \text{ est différentiable avec } \mathrm{d}f(x)\cdot h = \langle u(x) - a, h\rangle \text{ pour } (x, h) \in \mathrm{E}^2.}$

Variante : D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour $x \in \mathrm{E}$, notant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec les x_i réels, il vient

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur E car polynomiale. Puis

$$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \partial_i f(x) = \lambda_i x_i - a_i$$

d'où $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x) e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = u(x) - a$$

2. Dans l'ouvert E, un extremum de f est nécessairement point critique. Soit $x \in \mathrm{E}$. On a

$$\mathrm{d}f(x) = 0 \iff \forall h \in \mathrm{E} \qquad \langle u(x) - a, h\rangle = 0 \iff u(x) - a \in \mathrm{E}^{\perp} = \{0_{\mathrm{E}}\} \iff u(x) = a$$

L'endomorphisme u est injectif puisque 0 n'est pas valeur propre et comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, c'est un automorphisme. Ainsi

$$\mathrm{d}f(x) = 0 \iff x = u^{-1}(a)$$

Puis, en reprenant le calcul effectué à la question précédente, on a en $x_0 = u^{-1}(a)$

$$\forall h \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{\mathrm{d}f(x_0) \cdot h}_{=0} + \frac{1}{2}\langle u(h), h\rangle > 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique extremum qui est un minimum global strict en } x_0 = u^{-1}(a).}$$

Exercice 13 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{R} > 0$, déterminer l'espace tangent à la sphère $\mathrm{S}(\mathrm{A}, \mathrm{R})$ en un point de celle-ci.

Corrigé : On pose $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathrm{M}) = \langle \mathrm{M} - \mathrm{A}, \mathrm{M} - \mathrm{A}\rangle$

Le produit scalaire est bilinéaire sur E de dimension finie et $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} - \mathrm{A}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ d'où $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ avec

$$\forall (\mathrm{X}, \mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = 2\langle \mathrm{M} - \mathrm{A}, \mathrm{H}\rangle$$

On a $\mathrm{S}(\mathrm{A}, \mathrm{R}) = f^{-1}(\{\mathrm{R}^2\})$ et $\|\mathrm{M} - \mathrm{A}\| = \mathrm{R} > 0$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{S}(\mathrm{A}, \mathrm{R})$ ce qui prouve $\mathrm{M} - \mathrm{A} \neq 0_{\mathrm{E}}$ et donc $\mathrm{d}f(\mathrm{M}) \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})}$. On conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}(\mathrm{A}, \mathrm{R}) \qquad \mathrm{T}_{\mathrm{M}}\mathrm{S}(\mathrm{A}, \mathrm{R}) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{M} - \mathrm{A})^{\perp}}$$