ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°74

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ définie par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^{-1}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{U}$.

1. Justifier que U est un ouvert de E.
2. Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle.
   On pourra commencer par une étude en I_n.

Corrigé : 1. L'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est polynomiale donc continue. On a $\mathrm{U} = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ image réciproque d'un ouvert par une application continue. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble U est un ouvert de E.}}$$

2. On munit E d'une norme sous-multiplicative ce qui garantit $\mathrm{H}^2 = \mathrm{o}(\mathrm{H})$. Soit $\mathrm{H} \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{I}_n + \mathrm{H} \in \mathrm{U}$. On a

$$(\mathrm{I}_n + \mathrm{H})(\mathrm{I}_n - \mathrm{H}) = \mathrm{I}_n - \mathrm{H}^2 = \mathrm{I}_n + \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

D'où, en multipliant à gauche par $(\mathrm{I}_n + \mathrm{H})^{-1}$, comme on a

$$(\mathrm{I}_n + \mathrm{H})^{-1}\mathrm{o}(\mathrm{H}) = \|\mathrm{H}\| \underbrace{(\mathrm{I}_n + \mathrm{H})^{-1}\mathrm{o}(1)}_{=\mathrm{o}(1)} = \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

il vient
$$\mathrm{I}_n - \mathrm{H} = (\mathrm{I}_n + \mathrm{H})^{-1} + \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

autrement dit
$$f(\mathrm{I}_n + \mathrm{H}) = f(\mathrm{I}_n) - \mathrm{H} + \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

ce qui prouve la différentiabilité de f en I_n avec $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) \cdot \mathrm{H} = -\mathrm{H}$ pour tout $\mathrm{H} \in \mathrm{E}$. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{U}$ et $\mathrm{H} \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{A} + \mathrm{H} \in \mathrm{U}$. On obtient

$$f(\mathrm{A} + \mathrm{H}) = (\mathrm{A}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A}^{-1}\mathrm{H}))^{-1} = (\mathrm{I}_n + \mathrm{A}^{-1}\mathrm{H})^{-1}\mathrm{A}^{-1} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A}^{-1}\mathrm{H} + \mathrm{o}(\mathrm{H}))\mathrm{A}^{-1}$$

d'où
$$f(\mathrm{A} + \mathrm{H}) = f(\mathrm{A}) + \ell(\mathrm{H}) + \mathrm{o}(\mathrm{H}) \quad \text{avec} \quad \ell(\mathrm{H}) = -\mathrm{A}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{A}^{-1}$$

L'application ℓ est linéaire par bilinéarité du produit et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est différentiable avec } \mathrm{d}f(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{H} = -\mathrm{A}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{A}^{-1} \text{ pour tout } (\mathrm{A}, \mathrm{H}) \in \mathrm{U} \times \mathrm{E}.}$$

Remarques : (a) Avec la relation $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}\mathrm{Com}\,\mathrm{A}^\top$ pour $\mathrm{A} \in \mathrm{U}$, on constate que les fonctions coordonnées de f sont des fonctions rationnelles en les coefficients de A d'où le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de f sur U. Isoler la différentielle à partir de cette dernière écriture semble moins commode.

(b) On peut déterminer $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)$ sans passer par le calcul astucieux de $(\mathrm{I}_n + \mathrm{H})(\mathrm{I}_n - \mathrm{H})$. Pour $\|\mathrm{H}\| < 1$, on a $\|\mathrm{H}^\mathrm{N}\| \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$ d'après le caractère sous-multiplicatif de la norme puis par téléscopage

$$(\mathrm{I}_n + \mathrm{H})\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} (-1)^k\mathrm{H}^k = \mathrm{I}_n + (-1)^\mathrm{N}\mathrm{H}^{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \mathrm{I}_n$$

Comme $\|\mathrm{H}^k\| \leqslant \|\mathrm{H}\|^k$ pour k entier, on a la convergence absolue et donc la convergence de $\sum (-1)^k\mathrm{H}^k$. Par continuité du produit matriciel, il vient

$$(\mathrm{I}_n + \mathrm{H})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \mathrm{H}^k = \mathrm{I}_n - \mathrm{H} + \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

On retrouve le résultat précédent. On peut aussi déterminer directement les dérivées partielles de f en I_n : pour $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ et t réel, on a

$$(\mathrm{I}_n + t\mathrm{E}_{i,j})(\mathrm{I}_n - t\mathrm{E}_{i,j}) = \mathrm{I}_n - t^2\mathrm{E}_{i,j}^2 = \mathrm{I}_n + \mathrm{o}(t)$$

d'où $$\partial_{(i,j)} f(\mathrm{I}_n) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(\mathrm{I}_n + t\mathrm{E}_{i,j}) - f(\mathrm{I}_n)\right] = -\mathrm{E}_{i,j}$$

et on conclut comme ci-avant.

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

1. Justifier que $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})$.
2. Calculer $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)$ puis l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.
3. Calculer $\mathrm{d}f(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour avoir $\mathrm{d}f(\mathrm{A}) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})}$.

Corrigé : 1. L'application det est polynomiale en les coefficients de la matrice d'où

$$\boxed{\det \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})}$$

2. On a $$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \frac{1}{t}\left[\det(\mathrm{I}_n + t\mathrm{E}_{i,j}) - \det \mathrm{I}_n\right] \xrightarrow[t\to 0]{} \delta_{i,j} = \mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) \cdot \mathrm{E}_{i,j}$$

D'où, par linéarité de $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)$

$$\forall \mathrm{H} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) \cdot \mathrm{H} = \mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) \cdot \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_{i,j}\mathrm{E}_{i,j} \right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \delta_{i,j} h_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} h_{i,i} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{H})$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) = \mathrm{Tr}}$$

On a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{1\})$ avec $\mathrm{I}_n \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})}$. Il s'ensuit

$$\boxed{\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}}$$

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. En développant selon la j-ième colonne avec $j \in [\![1\,;\, n]\!]$, il vient

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, \mathrm{Com}(\mathrm{A})_{i,j}$$

d'où $$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \partial_{i,j} f(\mathrm{A}) = \mathrm{Com}(\mathrm{A})_{i,j}$$

puis $$\forall \mathrm{H} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{H} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \partial_{i,j} f(\mathrm{A}) h_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{Com}(\mathrm{A})_{i,j} h_{i,j}$$

On conclut $$\boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top \mathrm{H})}$$

Variante : Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a pour $\mathrm{H} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{M} + \mathrm{H}) &= \det(\mathrm{M}) \det(\mathrm{I}_n + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}) \\ &= \det(\mathrm{M})\,(1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}) + \mathrm{o}(\mathrm{H})) = \det(\mathrm{M}) + \det(\mathrm{M})\, \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}) + \mathrm{o}(\mathrm{H}) \end{aligned}$$

Avec la relation $\mathrm{MCom}(\mathrm{M})^\top = \det(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$, on obtient

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \mathrm{H} \mapsto \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top \mathrm{H}\right)$$

Les applications $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{d}f(\mathrm{M})$ et $\mathrm{M} \mapsto \left(\mathrm{H} \mapsto \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top \mathrm{H}\right)\right)$ sont continues sur E. En effet, l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ d'où la continuité de $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{d}f(\mathrm{M})$ et les fonctions coordonnées de $\mathrm{M} \mapsto \left(\mathrm{H} \mapsto \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top \mathrm{H}\right)\right)$ sont polynomiales en les coefficients de la matrice (puisque la comatrice l'est). Enfin, ces deux applications coïncident sur l'ouvert dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et on retrouve le résultat précédent.

4. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. En munissant E de son produit scalaire canonique défini par $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{X}^\top \mathrm{Y}\right)$ pour $(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^2$, on a $\mathrm{d}f(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{H} = \langle \mathrm{Com}(\mathrm{A}), \mathrm{H} \rangle$ pour $\mathrm{H} \in \mathrm{E}$. Ainsi

$$\mathrm{d}f(\mathrm{A}) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})} \iff \mathrm{Com}(\mathrm{A}) \in \mathrm{E}^\perp \iff \mathrm{Com}(\mathrm{A}) = 0$$

La comatrice $\mathrm{Com}(\mathrm{A})$ est nulle si et seulement si tous les cofacteurs de A sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si toute matrice extraite d'ordre $n-1$ est non inversible. On conclut

$$\boxed{\mathrm{d}f(\mathrm{A}) = 0 \iff \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) < n-1}$$

Exercice 3 (***)

Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *convexe*, si

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U}^2 \qquad \forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On suppose f différentiable sur U. Montrer

$$f \text{ convexe} \iff \forall (x,y) \in \mathrm{U}^2 \qquad f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f(x) \cdot (y-x)$$

Corrigé : Supposons f convexe. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \,]\,0\,;1\,]$. On a

$$f(x + \lambda(y-x)) \leqslant f(x) + \lambda\,(f(y) - f(x))$$

Comma $\lambda(y-x) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0_{\mathrm{E}}$, il vient

$$f(x) + \mathrm{d}f(x) \cdot \lambda(y-x) + \mathrm{o}(\lambda) \leqslant f(x) + \lambda\,(f(y) - f(x))$$

Ainsi
$$\mathrm{d}f(x) \cdot (y-x) + \mathrm{o}(1) \leqslant f(y) - f(x)$$

et faisant tendre $\lambda \to 0$, on a l'inégalité attendue. Réciproquement, on considère $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. On a

$$\begin{cases} f(y) \geqslant f(\lambda x + (1-\lambda)y) + \mathrm{d}f(\lambda x + (1-\lambda)y) \cdot \lambda(y-x) \\ f(x) \geqslant f(\lambda x + (1-\lambda)y) + \mathrm{d}f(\lambda x + (1-\lambda)y) \cdot (1-\lambda)(x-y) \end{cases}$$

Avec $(1-\lambda)\mathrm{L}_1 + \lambda \mathrm{L}_2$, on obtient l'inégalité de convexité attendue. Ainsi

$$\boxed{f \text{ convexe} \iff \forall (x,y) \in \mathrm{U}^2 \qquad f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f(x) \cdot (y-x)}$$

Exercice 4 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $\Delta = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ et on pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta \qquad \mathrm{F}(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x-y}$$

Montrer que F se prolonge en fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : On pose $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{G}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx+(1-t)y)\,\mathrm{d}t$

Les fonctions G et F coïncident clairement sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta$. Montrons que la fonction G admet des dérivées partielles continues. En remarquant $\mathrm{G}(x,y) = \mathrm{G}(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'existence et la continuité de la dérivée partielle de G en x équivaut à celle en y. Fixons y réel et notons $g_y : (x,t) \mapsto f'(tx+(1-t)y)$.

• Pour x réel, l'application $t \mapsto g_y(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment $[\,0\,;1\,]$.
• Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on a $x \mapsto g_y(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux, puis par dérivation

$$\frac{\partial g_y}{\partial x}(x,t) = tf''(tx+(1-t)y)$$

• Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g_y}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$.
• Domination : Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathbb{R}$. L'application $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial g_y}{\partial x}(x,t)$ est continue donc bornée sur le compact $[\,a\,;b\,] \times [\,0\,;1\,]$ et la domination s'ensuit.

D'après le théorème de régularité de classe $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale, on a $x \mapsto \mathrm{G}(x,y)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ d'où $x \mapsto \mathrm{G}(x,y) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 tf''(tx+(1-t)y)\,\mathrm{d}t$$

Montrons enfin la continuité de $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

• Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $t \mapsto tf''(tx+(1-t)y)$ continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$.
• Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on a $(x,y) \mapsto tf''(tx+(1-t)y)$ continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de telles fonctions.
• Domination : Soit K compact de $\mathbb{R}^2$. L'application $(x,y,t) \mapsto tf''(tx+(1-t)y)$ est continue donc bornée sur le compact $\mathrm{K} \times [\,0\,;1\,]$ (produit de compacts). La domination s'ensuit. On en déduit la continuité sur tout compact de $\mathbb{R}^2$ donc la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}$ et de même en y et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction G de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ prolonge la fonction F.}}$$

Remarque : L'écriture sous forme d'intégrale à paramètre permet d'établir, avec des arguments identiques, le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de F si f l'est aussi.

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}*\times\mathbb{R} \\ f(0)(y-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : On pose $$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(0)}{t-0} & \text{si } t \neq 0 \\ f(0) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour x réel. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(x,y) = y\varphi(xy) - \varphi(x)$$

Par construction, on a $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^2$ comme primitive de f fonction de classe $\mathscr{C}^1$. D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}'(0)t + \mathrm{F}''(0)\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2) = f(0)t + f'(0)\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$$

Puis

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^* \qquad \varphi'(t) &= \frac{1}{t^2}\left[tf(t) - \mathrm{F}(t)\right] \\ &= \frac{1}{t^2}\left[tf(0) + f'(0)t^2 - f(0)t - f'(0)\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\right] = \frac{f'(0)}{2} + \mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ par prolongement, on a $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Par composition, on conclut

$$\boxed{g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$$

Exercice 6 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E},\mathrm{E})$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathrm{E}$, la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ est injective puis bijective.
3. Soit $b \in \mathrm{E}$. On pose $g(x) = \|f(x) - b\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
   (a) Justifier que g atteint un minimum m sur E.
   (b) Montrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E},\mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{d}g(a)\cdot h$ pour $(a,h) \in \mathrm{E}^2$.
   (c) Conclure que f est bijective. Que peut-on dire sur f^{-1} ?

Corrigé : 1. Immédiat.
2. Soit $(a,h) \in \mathrm{E}^2$ et $t > 0$. Comme $th \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0_{\mathrm{E}}$, on a

$$\|f(a+th) - f(a)\| = \|\mathrm{d}f(a)\cdot(th) + \mathrm{o}(t)\| = t\|\mathrm{d}f(a)\cdot h + \mathrm{o}(1)\| \geqslant t\|h\|$$

d'où $$\|\mathrm{d}f(a)\cdot h + \mathrm{o}(1)\| \geqslant \|h\|$$

et faisant tendre $t \to 0^+$, il vient

$$\|\mathrm{d}f(a)\cdot h\| \geqslant \|h\|$$

L'injectivité de $\mathrm{d}f(a)$ s'en déduit et comme c'est un endomorphisme en dimension finie, on conclut

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in \mathrm{E}, \text{ la différentielle } \mathrm{d}f(a) \text{ est injective et donc bijective.}}$$

3.(a) L'ensemble Im g est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ donc admet une borne inférieure m finie. Pour $x \in \mathrm{E}$, on a

$$\sqrt{g(x)} = \|f(x) - b\| \geqslant \|f(x) - f(0)\| - \|f(0) - b\| \geqslant \|x\| - \|f(0) - b\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$$

Donc, il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que $g(x) \geqslant g(0)$ pour $\|x\| > \mathrm{R}$. La boule fermée $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ est un fermé borné de l'espace E de dimension finie et il s'agit donc d'un compact. Ainsi, l'application g, continue comme composée de telles fonctions, atteint son minimum sur $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$. En particulier, on a $g(0) \geqslant \underset{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})}{\mathrm{Min}}\ g$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R}) \qquad g(x) \geqslant \underset{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})}{\mathrm{Min}}\ g \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R}) \qquad g(x) \geqslant \underset{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})}{\mathrm{Min}}\ g$$

On conclut $\boxed{\text{La fonction } g \text{ atteint un minimum sur E.}}$

Variante : Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on dispose de $(\alpha_n)_n$ à valeurs dans E telle que $g(\alpha_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} m$. Puis, on a pour n entier

$$\|\alpha_n\| \leqslant \|f(\alpha_n) - f(0)\| \leqslant \|f(\alpha_n) - b\| + \|b - f(0)\| = \mathrm{O}(1)$$

La suite $(\alpha_n)_n$ est bornée dans un espace de dimension finie donc à valeurs dans un compact. Par conséquent, on dispose de φ extractrice telle $\alpha_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha \in \mathrm{E}$. Par continuité de g, on en déduit

$$g(\alpha_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} g(\alpha)$$

et la suite $(g(\alpha_n))_n$ étant convergente de limite m, toute sous-suite converge vers la même limite d'où le résultat.

3.(b) Par composition, l'application $g = \langle f - b, f - b \rangle$ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\mathrm{d}g = \langle \mathrm{d}f, f - b \rangle + \langle f, \mathrm{d}f - b \rangle = 2 \langle f - b, \mathrm{d}f \rangle$$

Ainsi $\boxed{\forall (a, h) \qquad \mathrm{d}g(a) \cdot h = 2 \langle f(a) - b, \mathrm{d}f(a) \cdot h \rangle}$

3.(c) Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $m = g(x_0)$. Comme E est un ouvert de lui-même, le point x_0 est point critique et on a donc $\mathrm{d}g(x_0) = 0$ d'où

$$\forall h \in \mathrm{E} \qquad \langle f(x_0) - b, \mathrm{d}f(x_0) \cdot h \rangle = 0$$

En particulier, pour $h = \mathrm{d}f(x_0)^{-1} \cdot (f(x_0) - b)$, on obtient $\|f(x_0) - b\|^2 = 0$ d'où $b = f(x_0)$ ce qui prouve la surjectivité de f et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bijective et l'application } f^{-1} \text{ est 1-lipschitzienne.}}$$

Exercice 7 (***)

Soit $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad xy \neq 1\}$. On pose

$$\forall (x, y) \in \mathrm{D} \qquad f(x, y) = \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, y - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

1. Justifier que D est un ouvert puis décrire ses composantes connexes par arcs.
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
3. En déduire une expression simple de f.

Corrigé : 1. On pose $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1 - xy$. L'application φ est polynomiale donc continue et on a $\mathrm{D} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$, image réciproque d'un ouvert par une application continue ce qui prouve

$$\boxed{\text{L'ensemble D est ouvert.}}$$

On pose $$\mathrm{U}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$$

$$\mathrm{U}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, xy > 1\} \qquad \mathrm{U}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y < 0, xy > 1\}$$

et $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \psi_1(x,y) = x \quad \text{et} \quad \psi_2(x,y) = y$$

Les applications ψ_1 et ψ_2 sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales. On a

$$\mathrm{U}_1 = \varphi^{-1}\left(\left]{+\infty}\,;1\right[\right) \qquad \mathrm{U}_2 = \varphi^{-1}\left(\left]1\,;{+\infty}\right[\right) \cap \psi_1^{-1}\left\{\left]0\,;{+\infty}\right[\right\} \cap \psi_2^{-1}\left(\left]0\,;{+\infty}\right[\right)$$

ce qui prouve que U_1 et U_2 sont des ouverts et on procède de même pour U_3. L'ensemble U_1 est étoilé en $(0,0)$: pour $(x,y) \in \mathrm{U}_1$, le chemin $\gamma : [0\,;1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto t(x,y)$ relie continument $(0,0)$ à (x,y) et est à valeurs dans U_1. Par conséquent, l'ensemble U_1 est connexe par arcs. L'ensemble U_2 est étoilé en $(2,2)$. En effet, soit $(x,y) \in \mathrm{U}_2$ et $t \in [0\,;1]$. On a

$$x + y > x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

puis $$\begin{aligned}(tx + (1-t)2)(ty + (1-t)2) &= t^2 xy + 2t(1-t)(x+y) + 4(1-t)^2 \\ &> t^2 + 4t(1-t) + 4(1-t)^2\end{aligned}$$

et $$t^2 + 4t(1-t) + 4(1-t)^2 = (t-2)^2 \geqslant 1$$

Ainsi $$(tx + (1-t)2)(ty + (1-t)2) > 1 \quad \text{et} \quad tx + (1-t)2 > 0 \quad ty + (1-t)2 > 0$$

Par conséquent, l'ensemble U_2 est connexe par arcs. Par symétrie, on a également U_3 étoilé donc connexe par arcs. Enfin d'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout chemin continue qui relie un point de U_1 à un point de U_2, un point de U_1 à un point de U_3 ou un point de U_3 à un point de U_2 prendra une valeur dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}$. Supposons par exemple qu'il existe $\theta : [0\,;1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ continue, à valeurs dans D, qui relie un point de U_1 à un point de U_2. Alors, on aurait $1 - x(0)y(0) > 0$ et $1 - x(1)y(1) < 0$ d'où l'existence d'une racine pour $t \mapsto 1 - x(t)y(t)$ ce qui est impossible. De même, si on considère que θ permet de relier un point de U_2 à un point de U_3, on aurait $x(0) > 0$ et $x(0) < 0$ d'où une racine pour x ce qui est impossible. Et on procède à l'identique entre U_1 et U_3. On conclut

$$\boxed{\text{Les ensembles } \mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \text{ et } \mathrm{U}_3 \text{ sont les composantes connexes par arcs de D et ce sont des ouverts.}}$$

Variante : Pour la connexité par arcs de U_2, on peut montrer sa convexité. Notons

$$\mathrm{V}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, xy \geqslant 1\}$$

Posant $g : \left]0\,;{+\infty}\right[\to \left]0\,;{+\infty}\right[, x \mapsto \dfrac{1}{x}$, on remarque que V_2 est l'épigraphe Γ_g^+ de la fonction convexe g. Il en résulte que V_2 est convexe et par conséquent, l'ensemble $\mathrm{U}_2 = \mathring{\mathrm{V}}_2$ également (voir exercice 0feuille 0).

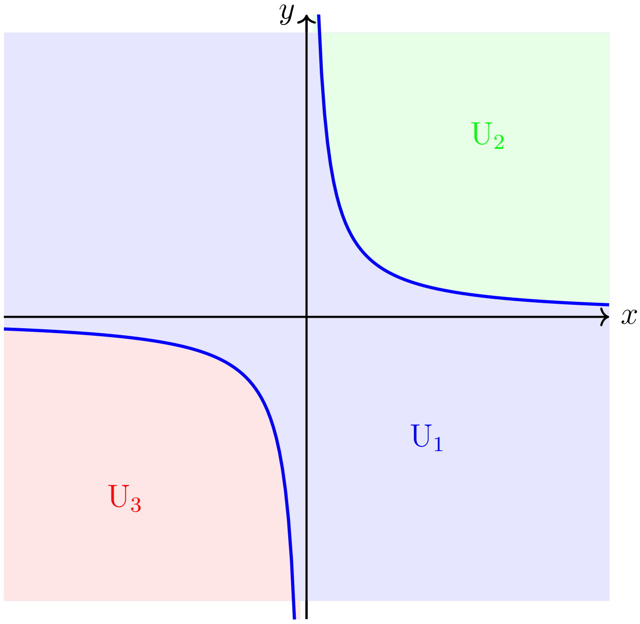

Figure 1 – Domaines U_1, U_2 et U_3

2. L'application f est composée de fonctions de $\mathscr{C}^1$ sur D d'où $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{D}, \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y) \in \mathrm{D} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2} \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = 0$$

Comme $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve également $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{D}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{d}f(x) = 0}$$

3. La fonction f est de différentielle nulle sur chaque ouvert connexe par arcs U_1, U_2 et U_3. Ainsi, la fonction f est constante sur chacun de ces ouverts. On a $f(0,0) = 0$ d'où $f(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathrm{U}_1$. Puis

$$\forall x > 1 \qquad f(x,x) = 2 \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1-x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pi$$

et
$$\forall (x,y) \in \mathrm{D} \qquad f(-x,-y) = -f(x,y)$$

On conclut
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{D} \qquad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in \mathrm{U}_1 \\ \pi & \text{si } (x,y) \in \mathrm{U}_2 \\ -\pi & \text{si } (x,y) \in \mathrm{U}_3 \end{cases}}$$

Exercice 8 (***)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$ est différentiable et préciser sa différentielle.

2. On pose $$\Phi: \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\langle x, x\rangle} \end{array}\right.$$

Montrer que Φ est différentiable sur $\mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ et l'équivalence pour $a \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$

$$\mathrm{d}\Phi(a) = 0 \iff a \text{ vecteur propre de } u$$

Corrigé : 1. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de u. Pour $x \in \mathrm{E}$, notant $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec les x_i coordonnées de x dans $\mathscr{B}$, on a

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j e_j$$

puis $$f(x) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j e_j \right\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \lambda_j \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

Ainsi, l'application f est polynomiale en les x_i donc de classe $\mathscr{C}^1$ et par conséquent différentiable. On a

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x) e_i = \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_i x_i e_i = 2u(x)$$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est différentiable avec } \mathrm{d}f(x) : h \to \langle \nabla f(x), h\rangle = 2\langle u(x), h\rangle \text{ pour } x \in \mathrm{E}.}$$

Variante : Soient x et h dans E. On a

$$f(x+h) = \langle x+h, u(x+h)\rangle = \langle x, u(x)\rangle + \langle h, u(x)\rangle + \underbrace{\langle x, u(h)\rangle}_{=\langle u(x),h\rangle} + \langle h, u(h)\rangle$$

Comme l'application u est linéaire sur un espace de dimension finie, elle est C-lipschitzienne avec $\mathrm{C} \geqslant 0$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle h, u(h)\rangle| \leqslant \|h\|\|u(h)\| \leqslant \mathrm{C}\|h\|^2 = \mathrm{o}(h)$$

Ainsi $$f(x+h) = f(x) + 2\langle u(x), h\rangle + \mathrm{o}(h)$$

On retrouve alors le résultat précédent.

2. Soit $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. On a $$\Phi(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Ainsi, l'application Φ est rationnelle en les x_i donc de classe $\mathscr{C}^1$ là où son dénominateur ne s'annule pas ce qui prouve que Φ est différentiable sur $\mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. Pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ et $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, on a

$$\partial_i \Phi(x) = \frac{2\lambda_i x_i \|x\|^2 - 2x_i \langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^4}$$

Puis

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} \qquad \nabla\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \Phi(x) e_i &= \frac{2}{\|x\|^4}\left[\|x\|^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i - \langle x, u(x)\rangle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right] \\ &= \frac{2}{\|x\|^4}\left[u(x)\|x\|^2 - \langle u(x), x\rangle x\right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$

$$\mathrm{d}\Phi(x) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})} \iff \nabla\Phi(x) = 0_{\mathrm{E}} \iff u(x) = \frac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} x$$

Ainsi, pour $x \in \mathrm{E}$ non nul, si $\mathrm{d}\Phi(x) = 0$, alors x est vecteur propre et si $u(x) = \lambda x$, on trouve sans difficulté $u(x) = \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} x$ d'où la nullité de $\mathrm{d}\Phi(x)$. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est différentiable sur } \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} \text{ avec } \mathrm{d}\Phi(x) = 0 \text{ si et seulement si } x \text{ vecteur propre de } u.}$$

Variante : Notons $g : x \mapsto \langle x, x\rangle$. Par bilinéarité du produit scalaire, l'application g est différentiable avec

$$\forall (x, h) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{d}g(x) \cdot h = 2\langle x, h\rangle$$

L'application f/g est différentiable sur $\mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ puisque g ne s'annule pas sur $\mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ et on trouve

$$\begin{aligned}
\forall (x, h) \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} \times \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}\Phi(x) \cdot h &= \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(x) \cdot h \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \left[(\mathrm{d}f(x) \cdot h)\, g(x) + f(x)\, (\mathrm{d}g(x) \cdot h)\right] \\
&= \frac{2}{\|x\|^4} \left[\langle u(x), h\rangle \|x\|^2 - \langle u(x), x\rangle \langle x, h\rangle\right] \\
\mathrm{d}\Phi(x) \cdot h &= \frac{2}{\|x\|^4} \left\langle u(x)\|x\|^2 - \langle u(x), x\rangle\, x, h\right\rangle
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\forall (x, h) \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} \times \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}\Phi(x) \cdot h = 0 \iff u(x)\|x\|^2 - \langle u(x), x\rangle\, x = 0$$

On conclut comme précédemment.

Exercice 9 (***)

Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières et le caractère $\mathscr{C}^1$ des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x^3) - \cos(y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Corrigé : 1. On a $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ sans difficulté. Puis, avec le caractère 1-lipschitzien de cos, il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\} \qquad |f(x, y) - f(0, 0)| \leqslant \left|\frac{x^3}{x^2 + y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2 + y^2}\right| \leqslant |x| + |y|$$

Par continuité $\qquad |x| + |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} |0| + |0| = 0$

Par encadrement $\qquad \boxed{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$

Comme $f(x,y) = -f(y,x)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'existence et la continuité des dérivées partielles de f en x et y sont équivalentes. On a

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{\cos(x^3)-1}{x^3} = -\frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2\sin(x^3)}{x^2+y^2} - \dfrac{2x(\cos(x^3)-\cos(y^3))}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec l'inégalité classique $|\sin u| \leqslant |u|$ pour u réel, on obtient pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant \left|\frac{3x^5}{x^2+y^2}\right| + \frac{2x\,|\cos(x^3)-\cos(y^3)|}{(x^2+y^2)^2}$$

Le caractère 1-lipschitzien ne suffit pas pour contrôler le deuxième terme. Avec le théorème des accroissements finis, il vient

$$|\cos(x^3)-\cos(y^3)| \leqslant \max(|x^3|,|y^3|)\,|x^3-y^3|$$

Par suite

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 3\,|x|^3 + 2\max(|x^3|,|y^3|)\left[\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} + \frac{|xy|\,y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

Et avec $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$, on obtient

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 3\,|x|^3 + 3\max(|x^3|,|y^3|)$$

Par continuité $\quad 3\,|x|^3 + 3\max(|x^3|,|y^3|) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 3\,|0|^3 + 3\max(|0|^3,|0|^3) = 0$

et par encadrement $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

On conclut $$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$$

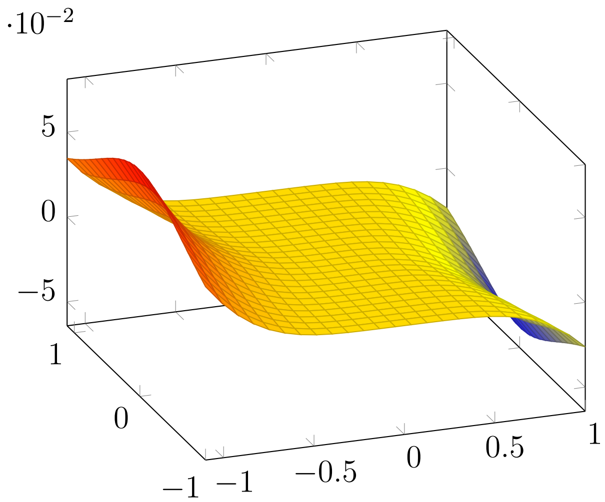

FIGURE 2 – Graphe de $z = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Variante : Par trigonométrie, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \cos(x^3) - \cos(y^3) = -2\sin\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)\sin\left(\frac{x^3-y^3}{2}\right)$$

et on peut utiliser l'inégalité classique $|\sin u| \leqslant |u|$ avec u réel.

Remarque : La fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^\infty$. On peut vérifier (en s'aidant d'un logiciel de calcul formel par exemple) que

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,0) \xrightarrow[x\to 0]{} -12 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,x) \xrightarrow[x\to 0]{} 12$$

2. On a $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$ par composition puis

$$\forall (x,y) \neq (0,0) \qquad |f(x,y) - f(0,0)| \leqslant x^2 + y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

ce qui prouve la continuité de f en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. Comme $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il suffit d'étudier la dérivée partielle de f en la première variable. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right) = x\mathrm{O}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Par dérivation, on trouve pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\qquad \forall x > 0 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right) - \dfrac{x}{|x|}\cos\left(\dfrac{1}{|x|}\right) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \mathrm{o}(1)$

qui n'admet pas de limite pour $x \to 0^+$ ce qui contredit la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. On conclut

$$\boxed{f \notin \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

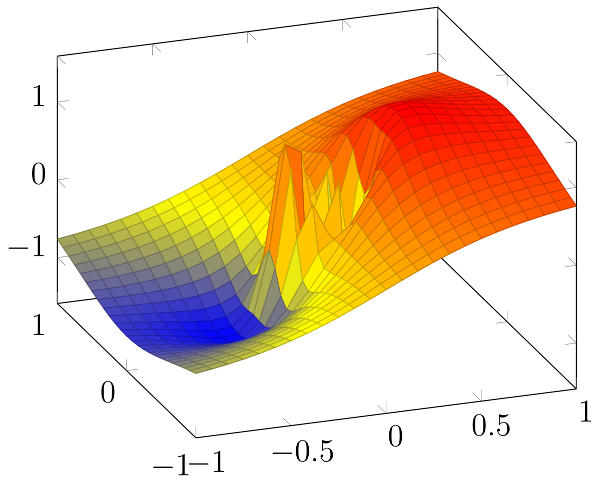

FIGURE 3 – Graphe de $z = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$