ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°76

Exercice 1 (*)

Étudier le caractère $\mathscr{C}^\infty$ des fonctions suivantes :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^4 + y^4 + xy$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(xy)$
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = |xy|$

Corrigé : 1. La fonction f est polynomiale donc

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

2. On a $(x,y) \mapsto xy$ polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis $(x,y) \mapsto \sin(xy)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ par composition et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ polynomiale et donc, par produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

3. La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ puis $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ d'où $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$ par composition. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$$

qui n'admet pas de limite en 0. La fonction f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$ et on conclut

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$$

4. La fonction f est polynomiale sur chacun des quarts de plans : $\mathbb{R}_+^2$, $\mathbb{R}_-^2$, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ donc sur chaque intérieur de ces parties. En revanche, pour $a \neq 0$, on a

$$\frac{f(t,a)-f(0,a)}{t-0} = \frac{|t|}{t}\,|a| = \frac{f(a,t)-f(a,0)}{t-0}$$

qui n'admet pas de limite en pour $t \to 0$. On en déduit que f n'est différentiable en aucun point des axes des abscisses et ordonnées autre que $(0,0)$. On conclut

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{U} = \,]\,0\,;+\infty\,[^2 \cup \,]-\infty\,;0\,[^2 \cup \,]\,0\,;+\infty\,[\times]-\infty\,;0\,[\cup \,]-\infty\,;0\,[\times]\,0\,;+\infty\,[}$$

Remarque : On a pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = |xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2} = \mathrm{o}(\sqrt{x^2+y^2})$$

d'où

$$f(x,y) = f(0,0) + \mathrm{o}(\|(x,y)\|)$$

ce qui prouve que f est différentiable en $(0,0)$. Toutefois, l'étude de différentiabilité n'a de sens que sur un ouvert et l'ensemble $\mathrm{U} \cup \{(0,0)\}$ n'en est pas un.

Exercice 2 (**)

Étudier le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ \mathrm{e}^x & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé : Soit $\Delta = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}\}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \qquad f(x,y) = \mathrm{e}^y \times \frac{\mathrm{e}^{x-y} - 1}{x-y}$$

Cette nouvelle écriture invite à considérer une fonction de variable réelle. En effet, avec le développement en série entière de la fonction exponentielle, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \iff \mathrm{e}^t - 1 = t \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}$$

Posons
$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après ce qui précède, la fonction φ est développable en série entière de rayon infini donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Or on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \qquad f(x,y) = \mathrm{e}^y \times \varphi(x-y)$$

Par définition de φ, cette relation vaut aussi pour $(x,y) \in \Delta$ d'où

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \mathrm{e}^y \times \varphi(x-y)$$

La fonction $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^y \times \varphi(x-y)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de composées de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ et par conséquent

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

Exercice 3 (**)

On note $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. On pose

$$\forall (x,y) \in \mathrm{D} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-xy)}{xy} & \text{si } (x,y) \in \mathrm{D} \setminus \Delta \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que D est ouvert de $\mathbb{R}^2$ et préciser la nature topologique de Δ.
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{D}, \mathbb{R})$.

Corrigé : 1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy$ est continue car polynomiale. L'ensemble $\mathrm{D} = \varphi^{-1}\left(\left]-\infty\,;1\right[\right)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue et l'ensemble $\Delta = \varphi^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble D est ouvert et l'ensemble } \Delta \text{ est fermé.}}$$

2. La fonction $t \mapsto \ln(1-t)$ est développable en série entière de rayon de convergence égal à 1 et on a

$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

On pose $\qquad \forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

D'après ce qui précède, la fonction φ est développable en série entière avec

$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \varphi(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$$

La fonction φ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-1\,;1\right[$. Par ailleurs, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\infty\,;0\right[$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. Il s'ensuit que $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\left]-\infty\,;1\right[, \mathbb{R})$. Or, on a

$$\forall (x,y) \in \mathrm{D} \qquad f(x,y) = \varphi(xy)$$

Par composition $\qquad \boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$

Exercice 4 (**)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

L'application f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

Corrigé : On a $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$ en tant que fonction rationnelle bien définie sur ce domaine. Par inégalité triangulaire, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad |f(x,y) - f(0,0)| \leqslant 2\,|xy| \quad \text{et} \quad |xy| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. On a $f(x,y) = -f(y,x)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. L'existence et la continuité de la dérivée partielle de f en x et en y sont équivalentes. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\,(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Là encore, par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 3\,|y| \quad \text{et} \quad |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

ce qui prouve la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. D'après l'égalité $f(x,y) = -f(y,x)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il vient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$$

Puis $\qquad \forall y \in \mathbb{R}^* \qquad \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -\dfrac{y^5}{y^5} = -1 \xrightarrow[y\to 0]{} -1$

et $\qquad \forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,x) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0} = \dfrac{x^5}{x^5} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Si f était de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwarz garantirait l'égalité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ qui n'a pas lieu. On conclut

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \setminus \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

Remarques : (a) On pourrait aussi calculer complètement une dérivée partielle d'ordre 2 et vérifier qu'elle n'est pas continue.
(b) Il s'agit du contre-exemple historique proposé par le mathématicien italien *Giuseppe Peano* au théorème de Schwarz.

Exercice 5 (*)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^3 + y^3$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$$

Il n'est pas utile d'étudier les conditions du deuxième ordre puisqu'on observe directement

$$\forall x > 0 \qquad f(x,0) = x^3 > 0 = f(0,0) \quad \text{et} \quad f(-x,0) = -x^3 < 0 = f(0,0)$$

Le point $(0,0)$ n'est donc ni minimum, ni maximum local pour f et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction n'admet aucun extremum sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 6 (*)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 + (x-y)^3$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : On a $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en tant que fonction polynomiale. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On obtient pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x + 3(x-y)^2 = 0 \\ 2y - 3(x-y)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\iff}_{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2} \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3(2x)^2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \left\{(0,0), \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)\right\}$$

Par dérivation, on trouve pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + 2(x-y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + 6(x-y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6(y-x)$$

• En $(0,0)$, la matrice hessienne $2\mathrm{I}_2$ est de déterminant égal à $4 > 0$ et de trace égale à $4 > 0$. Le point $(0,0)$ est donc un minimum local strict. Cet extremum n'est pas global puisque

$$f(x,0) = x^2 + x^3 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$$

• En $\left(-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}\right)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant égal à -4 ce qui prouve que le point considéré n'est pas un extremum local. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique extremum qui est minimum local strict non global en } (0,0).}$$

Remarque : Pour le point $(0,0)$, on peut observer directement

$$f(x,y) - f(0,0) \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} \left(x^2+y^2\right)(1+\mathrm{o}(1))$$

ce qui prouve le caractère minimum local du point.

Exercice 7 (**)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^2 + y^3$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\mathrm{B}_f(0,1)$.

Corrigé : La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On obtient pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$$

Il n'est pas utile d'étudier les conditions du deuxième ordre puisqu'on observe directement

$$\forall y > 0 \qquad f(0,y) = y^3 > 0 = f(0,0) \quad \text{et} \quad f(0,-y) = -y^3 < 0 = f(0,0)$$

ce qui prouve que $(0,0)$ n'est pas un extremum. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'admet pas d'extremum sur } \mathbb{R}^2.}$$

L'ensemble $\mathrm{B}_f(0,1)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ espace de dimension finie donc est un compact. La fonction f continue est bornée et atteint ses bornes sur $\mathrm{B}_f(0,1)$. Ces bornes sont atteintes soit dans l'intérieur de $\mathrm{B}_f(0,1)$, c'est-à-dire dans la boule ouverte $\mathrm{B}(0,1)$, soit sur la frontière $\partial\mathrm{B}_f(0,1)$. Si elles sont atteintes à l'intérieur, alors elles sont points critiques de f. Or l'unique point critique dans $\mathrm{B}(0,1)$ n'est pas extremum. Par conséquent, la fonction f atteint ses bornes sur la frontière $\partial\mathrm{B}_f(0,1)$. Ainsi

$$\operatorname*{Sup}_{(x,y)\in\mathrm{B}_f(0,1)} f(x,y) = \operatorname*{Sup}_{t\in[\,0\,;2\pi\,]} f(\cos(t),\sin(t)) \quad \text{et} \quad \operatorname*{Inf}_{(x,y)\in\mathrm{B}_f(0,1)} f(x,y) = \operatorname*{Inf}_{t\in[\,0\,;2\pi\,]} f(\cos(t),\sin(t))$$

On pose $\qquad \forall t \in [\,0\,;2\pi\,] \qquad g(t) = f(\cos(t),\sin(t)) = \cos(t)^2 + \sin(t)^3$

Pour $t \in [\,0\,;2\pi\,]$, on a

$$g(t) \leqslant \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1 = f(1,0) = f(-1,0) = f(0,1) \quad \text{et} \quad f(t) \geqslant \sin(t)^3 \geqslant -1 = f(0,-1)$$

On conclut

$$\boxed{\text{Sur } \mathrm{B}_f(0,1), \text{ la fonction } f \text{ atteint son maximum en } (1,0),\ (-1,0),\ (0,1) \text{ et son minimum en } (0,-1).}$$

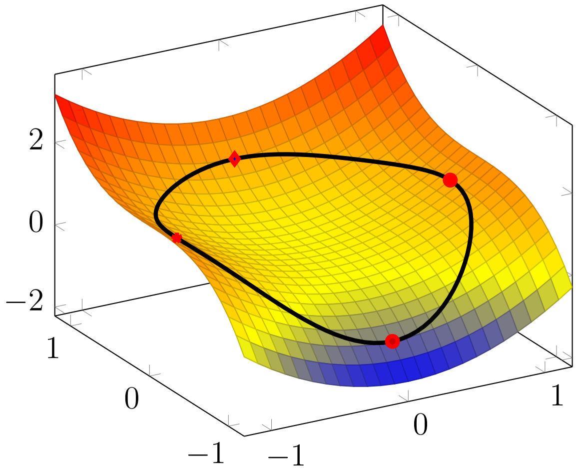

FIGURE 1 – Graphe de $z = f(x, y)$

Exercice 8 (**)

On pose $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$
Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\mathrm{B}_f(0, 1)$.

Corrigé : 1. On a $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en tant que fonction polynomiale. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On obtient pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

Puis, on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \qquad f(x, y) = \dfrac{1}{2}\left[(x + y)^2 + x^2 + y^2\right] > 0 = f(0, 0)$

Ainsi $\boxed{\text{Le point } (0, 0) \text{ est minimum global strict de } f \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$

Remarque : On peut évidemment examiner en premier lieu les conditions du deuxième ordre pour se faire une idée sur la nature du point $(0, 0)$.

Sur le compact $\mathrm{K} = \mathrm{B}_f(0, 1)$, fermé borné en dimension finie, la fonction continue f atteint ses bornes. Comme le point $(0, 0)$ est dans K et est minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$, il est également le minimum de f sur K. La fonction atteint également un maximum sur K. Celui-ci n'est pas dans l'ouvert $\mathring{\mathrm{K}}$ puisque l'unique point critique dans $\mathring{\mathrm{K}}$ est un minimum strict. Par suite, la fonction f atteint son maximum sur la frontière $\partial\mathrm{K}$ décrite par l'équation $x^2 + y^2 = 1$. Avec $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ paramétrage de $\partial\mathrm{K}$, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname*{Max}_{(x,y)\in\mathrm{K}} f(x, y) &= \operatorname*{Max}_{t\in[\,0\,;2\pi\,]} f(\cos(t), \sin(t)) \\ &= \operatorname*{Max}_{t\in[\,0\,;2\pi\,]} 1 + \frac{\sin(2t)}{2} = \frac{3}{2} = f\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = f\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un maximum sur K en } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$

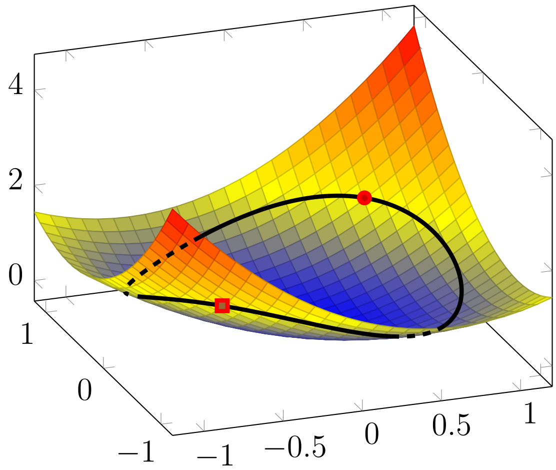

FIGURE 2 – Graphe de $z = f(x,y)$

Variante : On note $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \mathrm{X}^\top \mathrm{AX}$$

Par réduction, on trouve $\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{D} = \mathrm{diag}(3/2, 1/2)$ avec $\mathrm{P} = \mathrm{R}(\pi/4)$. Posant $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{X} = \mathrm{PU}$, on trouve

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{AX} = \mathrm{U}^\top \mathrm{P}^\top \mathrm{APU} = \mathrm{U}^\top \mathrm{DU} = \frac{3u^2 + v^2}{2}$$

On en déduit instantanément

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) \geqslant 0 = f(0,0)$$

Puis, comme la matrice P est une matrice d'isométrie, on a $\|\mathrm{X}\| = \|\mathrm{U}\|$ et il vient

$$\underset{\|\mathrm{X}\| \leqslant 1}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{X}^\top \mathrm{AX} = \underset{\|\mathrm{U}\| \leqslant 1}{\mathrm{Max}}\ \frac{3u^2 + v^2}{2} = \frac{3 \times 1^2 + 0^2}{2}$$

ce qui prouve que le maximum est atteint en $(u,v) = (1,0)$ (ou $(-1,0)$). Par changement de base, on retrouve le résultat précédent.

Exercice 9 (**)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = xy(1 - x - y + xy)$

Étudier les extremums de f sur $[\,0\,;1\,]^2$.

Corrigé : On observe

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = xy(1-x)(1-y) = x(1-x)y(1-y)$$

Une simple étude de fonction montre que la la fonction trinôme $t \mapsto t(1-t)$ est positive, s'annule en 0 et 1 et admet un maximum en $t = \dfrac{1}{2}$. On en déduit

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ atteint son minimum sur la frontière } \partial\,[\,0\,;1\,]^2 \text{ et son maximum en } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).}$$

Remarque : Si on ne voit pas cette factorisation, on peut procéder selon la méthode habituelle (c'est plus lourd mais ça fonctionne). La fonction f est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$. Le pavé $[\,0\,;1\,]^2$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ espace de dimension finie et il s'agit donc d'un compact. Par conséquent, la fonction f y atteint ses bornes. Celles-ci sont localisées soit sur la frontière, soit à l'intérieur du pavé. On constate l'annulation de f sur la frontière du pavé et la positivé de f sur le pavé. Puis, comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intérieur du pavé qui est ouvert, les points du pavé où f atteint son maximum sont des maximums locaux donc points critiques et la recherche d'annulation du gradient permet de conclure.

Exercice 10 (*)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = 2x + y \quad \text{et} \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 5$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Corrigé : Les fonctions f et g sont polynomiales donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On a l'équivalence pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = 0 \iff (x,y) \in \mathrm{S}(0,\sqrt{5})$$

La fonction continue f admet un minimum et un maximum sur la sphère $\mathrm{S}(0,\sqrt{5})$ qui est un compact de $\mathbb{R}^2$ en tant que fermé borné d'un espace de dimension finie. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \nabla g(x,y) = 2(x,y)$$

Ainsi $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \nabla g(x,y) = (0,0) \iff x = y = 0$

Or, on a $g(0,0) = -5 \neq 0$ donc les extremums de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$ sont des points où $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$. Par conséquent, d'après le théorème d'optimisation sous contrainte, ces points sont solutions de

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \;:\; \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 0$$

c'est-à-dire $\qquad \exists \lambda \in \mathbb{R} \;:\; (2,1) = 2\lambda(x,y) \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 5$

On en déduit notamment que λ n'est pas nul puis

$$x = \frac{1}{\lambda} \qquad y = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 5$$

On trouve $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$ puis $\qquad (x,y) \in \{(2,1), (-2,-1)\}$

On remarque $\qquad f(2,1) = 5 > -5 = f(-2,-1)$

et on conclut

$$\boxed{\text{Sous la contrainte } g(x,y) = 0\text{, la fonction } f \text{ admet un maximum en } (2,1) \text{ et un minimum en } (-2,-1).}$$

Exercice 11 (**)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = xy \quad \text{et} \quad g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Corrigé : Les fonctions f et g sont polynomiales donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \in \mathrm{S}(0, 2\sqrt{2})$$

ce qui prouve que l'ensemble $g^{-1}(\{0\})$ est borné et c'est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue. L'espace $\mathbb{R}^2$ étant de dimension finie, il s'ensuit que $g^{-1}(\{0\})$ est compact et la fonction continue f y admet un minimum et un maximum. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \nabla g(x,y) = 2(x, 4y)$$

Ainsi $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \nabla g(x,y) = (0,0) \iff x = y = 0$$

Or, on a $g(0,0) = -8 \neq 0$ donc les extremums de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$ sont des points où $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$. Par conséquent, d'après le théorème d'optimisation sous contrainte, ces points sont solutions de

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ : \ \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 0$$

c'est-à-dire $$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ : \ (y,x) = 2\lambda(x, 4y) \quad \text{et} \quad x^2 + 4y^2 = 8$$

Pour λ réel, on a $$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 8\lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 16\lambda^2 y \\ x = 8\lambda y \end{cases}$$

Si x ou y est nul, alors on trouve $(x,y) = 0$ qui ne vérifie pas la contrainte $g(x,y) = 0$. Par conséquent, on a x et y non nuls puis $\lambda = \pm \dfrac{1}{4}$ et

$$x = \pm 2y \qquad 8y^2 = 8$$

d'où $$(x,y) \in \{(2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)\}$$

Enfin, on remarque

$$f(2,1) = f(-2,-1) = 2 > -2 = f(-2,1) = f(2,-1)$$

et on conclut

$$\boxed{\text{Sous la contrainte } g(x,y) = 0, \text{ la fonction } f \text{ admet un maximum en } (2,1) \text{ et } (-2,-1) \text{ et un minimum en } (2,-1) \text{ et } (2,-1).}$$

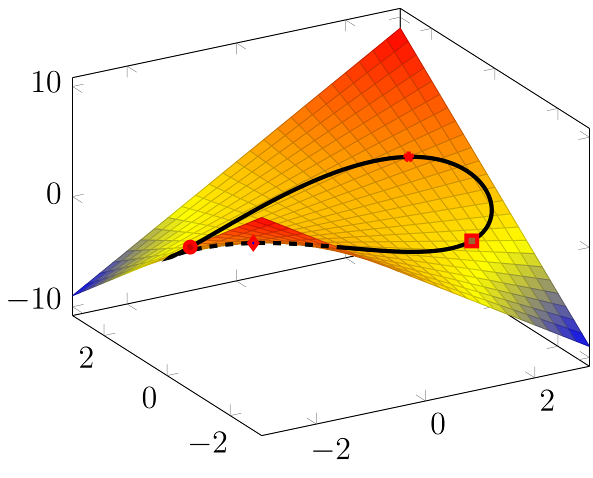

Figure 3 – Graphe de $z = f(x,y)$