ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°77

Exercice 1 (**)

On pose $\quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x) \leqslant 1$.

Corrigé : Les fonctions f et g sont polynomiales donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. On a l'équivalence pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$g(x) \leqslant 1 \iff x \in \mathrm{B}_f(0,1)$$

La fonction continue f admet un minimum et maximum sur la boule unité fermée $\mathrm{B}_f(0,1)$ qui est un compact de $\mathbb{R}^n$ en tant que fermé borné d'un espace de dimension finie. Les extremums sur $\mathrm{B}_f(0,1)$ sont atteints soit dans l'intérieur de $\mathrm{B}_f(0,1)$, soit sur sa frontière. Sans difficulté, on établit $\mathrm{B}_f(0,1)^\circ = \mathrm{B}(0,1)$. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \in \mathrm{B}(0,1) \qquad \nabla f(x) = (1, \ldots, 1)$$

Sur l'ouvert $\mathrm{B}(0,1)$, un extremum de f est nécessairement point critique. On en déduit que les extremums de f sur $\mathrm{B}_f(0,1)$ sont atteints sur la frontière $\partial\mathrm{B}_f(0,1)$, autrement dit sous la contrainte $g(x) = 1$ ou encore $g(x) - 1 = 0$. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \nabla g(x) = 2(x_1, \ldots, x_n)$$

Ainsi $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \nabla g(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Or, on a $g(0) = 0 \neq 1$ donc les extremums de f sous la contrainte $g(x) = 1$ sont des points où $\nabla g(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Par conséquent, d'après le théorème d'optimisation sous contrainte, ces points sont solutions de

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \;:\; \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 1$$

c'est-à-dire $\quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \;:\; (1, \ldots, 1) = 2\lambda(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x^2 = 1$

On en déduit notamment que λ n'est pas nul puis

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

On trouve $\lambda = \pm \dfrac{\sqrt{n}}{2}$ puis $\qquad x = \pm \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$

On remarque $\qquad f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sqrt{n} > -\sqrt{n} = f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, -\dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$

On a donc trouvé les deux candidats pour les points extremums sur $\partial\mathrm{B}_f(0,1)$ et on conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sous la contrainte } g(x) \leqslant 1 \text{, la fonction } f \text{ admet un maximum} \\ \text{en } \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) \text{ et un minimum en } \left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, -\dfrac{1}{\sqrt{n}} \right).\end{array}}$$

Exercice 2 (***)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \left]\, 0\,;+\infty\, \right[^2 \qquad f(x,y) = \dfrac{1}{xy} + x^2 + y^2$

Étudier les extremums de f sur $\left]\, 0\,;+\infty\, \right[^2$.

Corrigé : On a $f \in \mathscr{C}^2(\left]\, 0\,;+\infty\, \right[^2, \mathbb{R})$ en tant que fonction rationnelle bien définie. L'ensemble $\left]\, 0\,;+\infty\, \right[^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On obtient pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x - \dfrac{1}{yx^2} = 0 \\ 2y - \dfrac{1}{xy^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{2y^3} \\ y = \dfrac{1}{2x^3} \end{cases} \iff (x,y) = (a,a)$$

avec $a = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{2}{x^3 y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + \frac{2}{y^3 x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2 y^2}$$

La matrice hessienne en (a,a) est $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ de déterminant égal à $32 > 0$ et de trace égale à $12 > 0$. On en déduit que le point (a,a) est minimum local strict de f. On remarque

$$\forall (x,y) \in \left]\, 0\,;+\infty\, \right[\qquad f(x,y) \geqslant x + y \geqslant \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} +\infty$$

Par comparaison
$$f(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} +\infty$$

Ainsi, on dispose de $\mathrm{R} > 0$ tel que $f(x,y) > f(a,a)$ pour $\|(x,y)\| > \mathrm{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\dfrac{1}{\varepsilon \mathrm{R}} > f(a,a)$. Pour $(x,y) \in \left]\, 0\,;+\infty\, \right[^2 \cap \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ avec $x < \varepsilon$ ou $y < \varepsilon$, on a

$$f(x,y) \geqslant \frac{1}{xy} \geqslant \frac{1}{\varepsilon \mathrm{R}} > f(a,a)$$

Notons $\qquad \mathrm{K}_{\mathrm{R},\varepsilon} = \left\{ (x,y) \in \left[\, \varepsilon\,;+\infty\, \right[^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant \mathrm{R}^2 \right\}$

D'après ce qui précède, on a montré

$$\forall (x,y) \in \left]\, 0\,;+\infty\, \right[^2 \smallsetminus \mathrm{K}_{\mathrm{R},\varepsilon} \qquad f(x,y) \geqslant f(a,a) \geqslant \operatorname*{Inf}_{\mathrm{K}_{\mathrm{K},\varepsilon}} f$$

la dernière inégalité résultant du fait que $(a,a) \in \mathrm{K}_{\mathrm{R},\varepsilon}$ puisqu'il n'est pas hors de cet ensemble. On en déduit

$$\operatorname*{Inf}_{\left]\, 0\,;+\infty\, \right[^2} f = \operatorname*{Inf}_{\mathrm{K}_{\mathrm{R},\varepsilon}} f$$

Or, l'ensemble $\mathrm{K}_{\mathrm{R},\varepsilon}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie. C'est donc un compact et la fonction continue f y atteint sa borne inférieure ce qui prouve que la fonction f admet un minimum global. Comme la fonction admet un unique point critique sur l'ouvert $\left]\, 0\,;+\infty\, \right[^2$, c'est nécessairement le point (a,a) et avec le caractère strict établi localement, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ atteint un minimum global strict en } (a,a) \text{ avec } a = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}.}$$

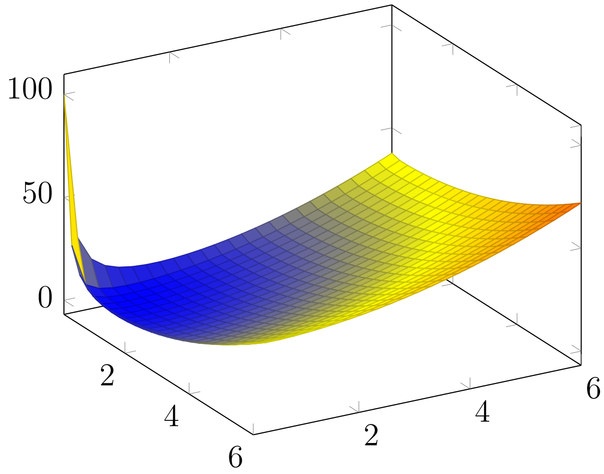

FIGURE 1 – Graphe de $z = f(x, y)$

Exercice 3 (***)

On pose $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

et $$\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter le domaine D et préciser sa nature topologique.
3. Étudier les extremums de f sur D.

Corrigé : 1. La fonction f est polynomiale d'où

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On a

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

Puis, on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \qquad f(x, y) = \frac{1}{2}\left[(x - y)^2 + x^2 + y^2\right] > 0 = f(0, 0)$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique extremum qui est un minimum global strict en } (0, 0).}$$

2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(x, y) \in \mathrm{D} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x \leqslant x^2 + y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geqslant \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

On en déduit que le domaine D est contenu dans le disque unité fermé en excluant le disque ouvert centré en $(1/2, 0)$ de rayon $1/2$.

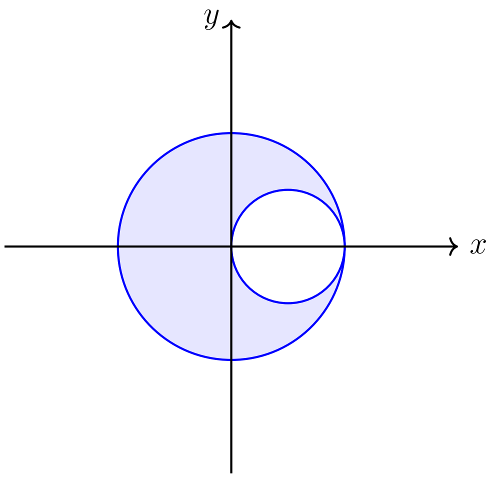

FIGURE 2 – Domaine D

On a $\mathrm{D} = \mathrm{B}_f(0,1) \smallsetminus \mathrm{B}(1/2,1/2)$ ce qui prouve la fermeture de D ainsi que son caractère borné dans $\mathbb{R}^2$ espace de dimension finie. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble D est un compact.}}$$

3. On a $(0,0) \in \mathrm{D}$ et la fonction f y admet donc un minimum global strict sur D. Puis, la fonction f est continue sur le compact D donc y admet un maximum, localisé dans l'intérieur $\overset{\circ}{\mathrm{D}}$ ou sur la frontière $\partial\mathrm{D}$.

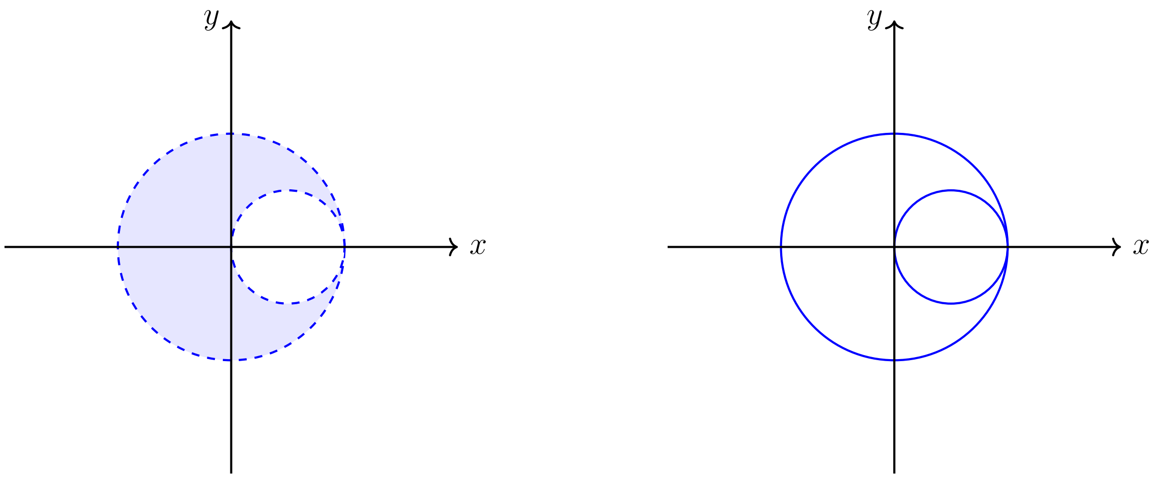

FIGURE 3 – Domaines $\overset{\circ}{\mathrm{D}}$ et $\partial\mathrm{D}$

On a
$$\overset{\circ}{\mathrm{D}} : x < x^2 + y^2 < 1$$

Le point $(0,0)$ n'appartient pas à $\overset{\circ}{\mathrm{D}}$ donc la fonction f n'admet pas de point critique dans $\overset{\circ}{\mathrm{D}}$. Par conséquent, elle atteint son maximum sur D sur la frontière $\partial\mathrm{D}$. On peut paramétrer les composantes de $\partial\mathrm{D}$ par $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et $t \mapsto \left(\dfrac{1}{2}(1+\cos(t)), \dfrac{\sin(t)}{2}\right)$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = 1 - \cos(t)\sin(t) = 1 - \frac{\sin(2t)}{2}$$

et
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h(t) = f\left(\frac{1}{2}(1+\cos(t)), \frac{\sin(t)}{2}\right) = \frac{1}{4}(1+\cos(t))(2-\sin(t))$$

On en déduit $\qquad \operatorname{Im} g = \left[\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right] \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} h \subset \left[0\,;\dfrac{3}{2}\right[$

avec
$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

On conclut

$$\boxed{\text{Sur D, la fonction } f \text{ admet un minimum en } (0,0) \text{ et un maximum en } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et} \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

Exercice 4 (****)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : On a $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ car f est polynomiale. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On obtient pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)$$

puis
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - (x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ x(x^2-2) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les points critiques de } f \text{ sont } (0,0),\ \left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right).}$$

Par dérivation, on trouve
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4$$

• En $(0,0)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul. Les conditions du deuxième ordre ne permettent pas de conclure. On a $f(0,0) = 0$. Puis, en considérant des directions particulières, on trouve $f(x,x) = 2x^4 > 0$ pour $x \neq 0$ et $f(x,0) = -2x^2 + x^4 \underset{x \to 0}{\sim} -2x^2 < 0$ pour $x \neq 0$. Ainsi, au voisinage du point $(0,0)$, la fonction f prend des valeurs supérieures et inférieures à $f(0,0)$ donc

$$\boxed{\text{Le point } (0,0) \text{ n'est pas un extremum local.}}$$

Pour raison de symétrie, on se contente de traiter un des deux points critiques restants.

• En $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ est de déterminant égal à $20^2 - 4^2 > 0$ et de trace égale à $40 > 0$ ce qui prouve que le point considéré est un minimum local strict. Dans l'écriture de $f(x,y) - f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, on décompose $8 = 2^2 + 2^2$ pour faire apparaître les carrés $(x^2-2)^2$ et $(y^2-2)^2$ qui s'annulent en le point $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$. Ce faisant, on obtient
$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) - f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) &= x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 8 \\ &= (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Le point $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ est donc un minimum global, strict d'après l'étude locale précédente. Par symétrie, on conclut

$$\boxed{\text{Les points } \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \text{ sont des minimums globaux stricts de } f.}$$

Variante : Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique $\|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a les inégalités suivantes :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x^4 + y^4 \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant (x-y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$$

D'où
$$f(x,y) \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 + \mathrm{O}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{O}(1)\right)$$

Par comparaison
$$f(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} +\infty$$

Ainsi, il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que $f(x,y) \geqslant 1$ pour tout $\|(x,y)\| > \mathrm{R}$. Sur le compact $\mathrm{B}_f((0,0),\mathrm{R})$, la fonction continue f atteint ses bornes donc en particulier un minimum. Comme $f(0,0) = 0 \leqslant 1$, alors le minimum atteint sur $\mathrm{B}_f((0,0),\mathrm{R})$ est un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Or, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est un ouvert donc le minimum global est un point critique. Pour raison de symétrie, les points $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ sont de même nature et on en déduit

$$\boxed{\text{Les points } \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \text{ sont minimums globaux de } f.}$$

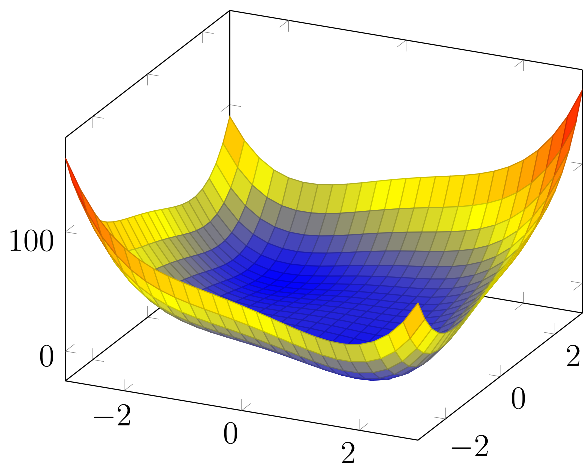

FIGURE 4 – Graphe de $z = f(x,y)$

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On dit que f est homogène de degré p entier si

$$\forall (t,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 \qquad f(tx,ty) = t^p f(x,y)$$

Montrer que f est homogène de degré p si et seulement si

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = pf$$

Corrigé : On suppose f homogène. Fixons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = f(tx,ty) - t^p f(x,y)$$

Par dérivation composée, on a

$$\forall t > 0 \qquad g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - pt^{p-1}f(x, y)$$

La fonction g étant nulle sur $]\,0\,;+\infty\,[$, on a en particulier $g(1) = 0$ d'où

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = pf$$

Supposons que f vérifie cette dernière relation. Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On trouve

$$\forall t > 0 \qquad tg'(t) = tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - pt^p f(x, y) = pf(tx, ty) - pt^p f(x, y) = pg(t)$$

Ainsi, la fonction g est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} tg' - pg = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases}$$

dont la fonction nulle est l'unique solution d'après le théorème de Cauchy linéaire. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est homogène de degré } p \text{ si et seulement si } x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = pf.}$$

Exercice 6 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, orthogonale. On note

$$\forall (i, j, k) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^3 \qquad \alpha_{i,j,k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}$$

1. Montrer $\qquad \forall (i, j, k) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^3 \qquad \alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}$
2. En déduire qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \mathrm{A}x + b$$

Corrigé : 1. Le théorème de Schwarz appliqué à $f_p \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $p \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ fournit la première égalité

$$\forall (i, j, k) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^3 \qquad \alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j}$$

La matrice jacobienne $\mathrm{J}_f(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ donc ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ d'où

$$\forall (i, k) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^2 \qquad \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_k} = \delta_{i,k}$$

En dérivant par rapport à x_j pour $j \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, il vient

$$\forall (i, j, k) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^3 \qquad \sum_{p=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_i} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_k} + \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}\right] = 0 \iff \alpha_{k,j,i} + \alpha_{i,j,k} = 0$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall (i, j, k) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^3 \qquad \alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}}$

2. La dernière égalité de la relation établie à la première question signifie qu'une permutation circulaire des indices change le signe de la quantité. Ainsi, en effectuant trois permutations circulaires successives, on obtient

$$\forall (i, j, k) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^3 \qquad \alpha_{i,j,k} = (-1)^3 \alpha_{i,j,k} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_{i,j,k} = 0$$

Fixons $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $(j,k) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont la p-ième ligne contient $f_{j,k,p} = \dfrac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)$. On a

$$\mathrm{J}_f^\top(x)\mathrm{X} = \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)\right)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]} = \big(\alpha_{i,j,k}\big)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]} = 0$$

Or, la matrice $\mathrm{J}_f^\top(x)$ est orthogonale donc inversible d'où

$$\mathrm{J}_f^\top(x)\mathrm{X} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X} = 0$$

et par suite $\qquad \forall (i,j,k) \in [\![1\,;\,n]\!]^3 \qquad f_{i,j,k} = 0 \iff \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\partial_j f_k\right) = 0$

Par caractérisation d'une fonction constante sur $\mathbb{R}^n$ ouvert connexe par arcs, il s'ensuit

$$\forall (j,k) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad \exists a_{k,j} \in \mathbb{R} \quad | \quad \partial_j f_k = a_{k,j}$$

Ainsi, la matrice jacobienne de f en tout point est la matrice $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big)$ qui est par hypothèse orthogonale. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad g(x) = f(x) - \mathrm{A}x$$

La fonction g est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ avec

$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad g_k(x) = f_k(x) - \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} x_i$$

En dérivant par rapport à x_j avec $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, il vient

$$\forall (j,k) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \partial_j g_k(x) = \partial_j f_k(x) - a_{k,j} = 0$$

À nouveau par caractérisation d'une fonction constante sur un ouvert connexe par arcs, il s'ensuit

$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \exists b_k \in \mathbb{R} \quad | \quad g_k = b_k$$

Notant $b = (b_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]}$, il en résulte que

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } b \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) = \mathrm{A}x + b \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.}$$

Exercice 7 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, U ouvert borné non vide de E, $f \in \mathscr{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ et f continue sur $\bar{\mathrm{U}}$. On définit le *laplacien* de f sur U noté Δf par

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U} \qquad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^f}{\partial x_i^2}(x) \quad \text{ou} \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(x)$$

1. Justifier que f admet un maximum en un point $x_0 \in \bar{\mathrm{U}}$.
2. On suppose $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{U}$. Montrer

$$x_0 \in \partial\mathrm{U} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{U} \qquad f(x) < \operatorname*{Sup}_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)$$

On pourra supposer par l'absurde que $x_0 \in \mathrm{U}$, justifier l'existence d'un $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$ et considérer $\varphi : t \mapsto f(x_0 + te_i)$ avec e_i le i-ème vecteur de la base canonique.

On suppose désormais que f est *harmonique* sur U, *i.e.* $\Delta f = 0$. On pose

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$$

3. Montrer que g_ε est continue sur $\bar{\mathrm{U}}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et que

$$\forall x \in \mathrm{U} \qquad \Delta g_\varepsilon(x) > 0$$

4. En déduire $$\forall x \in \mathrm{U} \qquad f(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{y \in \partial \mathrm{U}} f(y)$$

Corrigé : 1. Notons $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Comme l'ouvert U est borné, il existe $\mathrm{R} \geqslant 0$ tel que $\mathrm{U} \subset \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ d'où $\bar{\mathrm{U}} \subset \overline{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} = \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ puisqu'une boule fermée est un fermé. Ainsi, l'ensemble $\bar{\mathrm{U}}$ est un fermé borné de E de dimension finie. Par conséquent, la fonction f continue sur le compact $\bar{\mathrm{U}}$ est bornée et atteint ses bornes et donc en particulier

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un maximum en } x_0 \in \bar{\mathrm{U}}.}$$

2. Supposons $x_0 \in \mathrm{U}$. Par hypothèse, on a $\Delta f(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \partial_k^2 f(x_0) > 0$. Si $\partial_k^2 f(x_0) \leqslant 0$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, alors $\Delta f(x_0) \leqslant 0$ ce qui est faux. Ainsi, il existe un entier $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $\partial_i^2 f(x_0) > 0$. Comme $x_0 \in \mathrm{U}$ avec U ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x_0, r) \subset \mathrm{U}$. On a pour t réel

$$x_0 + t e_i \in \mathrm{B}(x_0, r) \iff |t| < r$$

On pose $$\forall t \in \left]-r\,;r\right[\qquad \varphi(t) = f(x_0 + t e_i)$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\left]-r\,;r\right[$ et admet un maximum en zéro puisque f admet un maximum en x_0. Alors, comme zéro est un point intérieur à $\left]-r\,;r\right[$, on a

$$\varphi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = \partial_i^2 f(0) > 0$$

D'après le théorème de Taylor-Young, il vient

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \varphi''(0)\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2) = \frac{t^2}{2}\left(\varphi''(0) + \mathrm{o}(1)\right)$$

qui est strictement positive au voisinage de zéro ce qui prouve qu'il s'agit d'un minimum strict, ce qui est absurde. Ainsi, la fonction f atteint son maximum sur $\bar{\mathrm{U}}$ en un point $x_0 \in \bar{\mathrm{U}} \setminus \mathrm{U} = \partial \mathrm{U}$ d'où

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \bar{\mathrm{U}}} f(x) = f(x_0) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in \partial \mathrm{U}} f(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in \bar{\mathrm{U}}} f(x)$$

et ce maximum n'est atteint en aucun point de U d'après ce qui précède d'où

$$\boxed{x_0 \in \partial \mathrm{U} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{U} \qquad f(x) < \operatorname*{Sup}_{x \in \partial \mathrm{U}} f(y)}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. On a $$\forall x \in \bar{\mathrm{U}} \qquad g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Ainsi, la fonction g_ε est somme de la fonction f et d'une fonction polynomiale qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\bar{\mathrm{U}}$ et on en déduit

$$\boxed{g_\varepsilon \in \mathscr{C}(\bar{\mathrm{U}}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g_\varepsilon \in \mathscr{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})}$$

Par dérivation on trouve

$$\forall x \in \mathrm{U} \qquad \forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \partial_i^2 g_\varepsilon(x) = \partial_i^2 f + 2\varepsilon$$

d'où $$\boxed{\forall x \in \mathrm{U} \qquad \Delta g_\varepsilon(x) = \Delta f + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon > 0}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le résultat de la question 2, on a

$$\forall x \in \mathrm{U} \qquad f(x) \leqslant g_\varepsilon(x) < \operatorname*{Sup}_{y\in\partial\mathrm{U}} g_\varepsilon(y)$$

puis $$\forall y \in \partial\mathrm{U} \qquad g_\varepsilon(y) = f(y) + \varepsilon\|y\|^2 \leqslant \operatorname*{Sup}_{y\in\partial\mathrm{U}} f + \varepsilon \operatorname*{Sup}_{y\in\partial\mathrm{U}} \|y\|^2$$

la borne supérieure $\operatorname*{Sup}_{y\in\partial\mathrm{U}} \|y\|^2$ étant finie puisque $\partial\mathrm{U} \subset \bar{\mathrm{U}}$ qui est borné. Ainsi, on trouve

$$\operatorname*{Sup}_{y\in\partial\mathrm{U}} g_\varepsilon(y) \leqslant \operatorname*{Sup}_{y\in\partial\mathrm{U}} f + \varepsilon \operatorname*{Sup}_{y\in\partial\mathrm{U}} \|y\|^2$$

d'où $$\forall x \in \mathrm{U} \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad f(x) < \operatorname*{Sup}_{y\in\partial\mathrm{U}} f + \varepsilon \operatorname*{Sup}_{y\in\partial\mathrm{U}} \|y\|^2$$

Pour $x \in \mathrm{U}$, faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{U} \qquad f(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in\partial\mathrm{U}} f}$$

Remarque : Ce résultat est intitulé *principe du maximum.*