ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°35

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$ avec $f(a) = 0$. Montrer

$$\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;b\,]} \|f'(t)\|$$

Corrigé : On a f' continue sur $[\,a\,;b\,]$ donc bornée sur ce segment. D'après l'inégalité des accroissements finis, il vient

$$\forall t \in [\,a\,;b\,] \qquad \|f(t)\| = \|f(t) - f(a)\| \leqslant \operatorname*{Sup}_{u\in[\,a\,;b\,]} \|f'(u)\|\,|t-a|$$

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \operatorname*{Sup}_{u\in[\,a\,;b\,]} \|f'(u)\|(t-a)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi
$$\boxed{\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;b\,]} \|f'(t)\|}$$

Variante : On pose F définie sur $[\,a\,;b\,]$ par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [\,a\,;b\,]$. On a $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^2([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$ et d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\|\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}'(a)(b-a)\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;b\,]} \|\mathrm{F}''(t)\|$$

et avec $\mathrm{F}'(a) = f(a) = 0$, on retrouve le résultat attendu.

Exercice 2 (***)

Étudier la nature de la suite $(\sin(\ln(n)))_{n\geqslant 1}$.

Corrigé : Notons $n_k = \lfloor \mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}} \rfloor$ pour k entier. On a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}} - n_k < 1$$

On en déduit notamment
$$n_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$

On pose $f(x) = \sin(\ln(x))$ pour tout $x > 0$. On a f dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme composée de telles fonctions et par dérivation

$$\forall x > 0 \qquad f'(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln(x))$$

Pour k entier, il vient par inégalité des accroissements finis appliqués à f sur $\left[\,n_k\,;\mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}}\,\right]$

$$\left|f(n_k) - f(\mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}})\right| \leqslant \frac{1}{n_k}\left|n_k - \mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{n_k} = \mathrm{o}(1)$$

On a $f(\mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}}) = \sin\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$ pour k entier donc en particulier

$$f(\mathrm{e}^{2k\frac{\pi}{2}}) = \sin(k\pi) = 0 \quad \text{et} \quad f(\mathrm{e}^{(4k+1)\frac{\pi}{2}}) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Ainsi $$f(n_{2k}) = \mathrm{o}(1) \quad \text{et} \quad f(n_{4k+1}) = 1 + \mathrm{o}(1)$$

donc il existe deux suites extraites (quitte à réextraire pour garantir la stricte croissance) de $(\sin(\ln(n)))_n$ qui admettent des limites différentes. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (\sin(\ln(n)))_n \text{ est divergente.}}$$

Exercice 3 (***)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{n+k}\right)$$

Corrigé : D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad |\sin(u) - u| \leqslant \frac{u^2}{2}$$

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sin\left(\frac{\pi}{n+k}\right) - \frac{\pi}{n+k}\right]$$

On a $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |\Delta_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2}{2(n+k)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{2n} = \mathrm{o}(1)$$

Puis $$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{n+k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+1} + \mathrm{o}(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{1+k/n} + \mathrm{o}(1)$$

D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on conclut

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{n+k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\pi\,\mathrm{d}t}{1+t} = \pi\ln(2)}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathrm{E})$. On suppose que f et f'' sont bornées. On note $\mathrm{M}_0 = \|f\|_\infty$ et $\mathrm{M}_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\quad \forall h > 0 \qquad \|f'(x)\| \leqslant \dfrac{2\mathrm{M}_0}{h} + \dfrac{h\mathrm{M}_2}{2}.$
2. En déduire $$\mathrm{M}_1 = \|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$$
3. Peut-on améliorer l'inégalité ?

Corrigé : 1. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2 \qquad \|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{2}$$

d'où, par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|hf'(x)\| &= \|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - f(x+h) + f(x)\| \\ &\leqslant \|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| + \|f(x+h)\| + \|f(x)\| \leqslant 2\mathrm{M}_0 + \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\forall (x,h)\in\mathbb{R}\times\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \|f'(x)\|\leqslant\frac{2\mathrm{M}_0}{h}+\frac{h\mathrm{M}_2}{2}}$$

2. Si $\mathrm{M}_2=0$, on a $\|f'(x)\|\leqslant\dfrac{2\mathrm{M}_0}{h}$ pour tout $h>0$ et faisant tendre $h\to+\infty$, il s'ensuit $\|f'(x)\|=0$ pour tout x réel. L'inégalité a donc lieu. Si $\mathrm{M}_2\neq 0$, on pose

$$\forall h>0\qquad \varphi(h)=\frac{2\mathrm{M}_0}{h}+\frac{h\mathrm{M}_2}{2}$$

Par dérivation $$\forall h>0\qquad \varphi'(h)=-\frac{2\mathrm{M}_0}{h^2}+\frac{\mathrm{M}_2}{2}\geqslant 0\iff h\leqslant 2\sqrt{\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{M}_2}}$$

et par suite $$\operatorname*{Inf}_{h>0}\varphi(h)=\varphi\left(2\sqrt{\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{M}_2}}\right)=2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$$

Passant à la borne inférieure en $h>0$ de part et d'autre dans l'inégalité

$$\forall (x,h)\in\mathbb{R}\times\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \|f'(x)\|\leqslant\varphi(h)$$

on obtient $$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \|f'(x)\|\leqslant\operatorname*{Inf}_{h>0}\varphi(h)$$

Et passant à la borne supérieure en x réel, on conclut

$$\boxed{\mathrm{M}_1\leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}}$$

3. Pour x, h réels, avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\|f(x+h)-f(x)-hf'(x)\|\leqslant\frac{\mathrm{M}_2h^2}{2}\quad\text{et}\quad\|f(x-h)-f(x)+hf'(x)\|\leqslant\frac{\mathrm{M}_2h^2}{2}$$

puis

$$\begin{aligned}\|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)\|&=\|f(x+h)-f(x)-hf'(x)-(f(x-h)-f(x)+hf'(x))\|\\&\leqslant\|f(x+h)-f(x)-hf'(x)\|+\|f(x-h)-f(x)+hf'(x)\|\end{aligned}$$

$$\|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)\|\leqslant\mathrm{M}_2h^2$$

et

$$\begin{aligned}\|2hf'(x)\|&=\|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)-f(x+h)+f(x-h)\|\\&\leqslant\|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)\|+\|f(x+h)\|+\|f(x-h)\|\leqslant 2\mathrm{M}_0+\mathrm{M}_2h^2\end{aligned}$$

d'où $$\forall h>0\qquad \|f'(x)\|\leqslant\frac{\mathrm{M}_0}{h}+\frac{\mathrm{M}_2h}{2}$$

On pose $$\forall h>0\qquad \psi(h)=\frac{\mathrm{M}_0}{h}+\frac{\mathrm{M}_2h}{2}$$

On trouve $$\operatorname*{Inf}_{h>0}\psi(h)=\psi\left(\sqrt{2\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{M}_2}}\right)=\sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{M}_1\leqslant\sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}}$$

Remarque : Il s'agit de la première inégalité de *Landau-Kolmogorov*.

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}([0;1], \mathrm{E})$ avec E euclidien. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir

$$\|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\| = \int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : Si $f(t) = \varphi(t)u$ avec $\varphi \in \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R}_+)$ et $u \in \mathrm{E}$ normé, l'égalité a clairement lieu et on a $u = \dfrac{\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^1 \|f(t)\|_2\,\mathrm{d}t}$ si $f \neq 0$. Réciproquement, on suppose $f \neq 0$ et on pose u comme trouvé précédemment. Il vient, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\| = \left\langle u, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right\rangle = \int_0^1 \langle u, f(t)\rangle\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Par suite
$$\int_0^1 [\|f(t)\| - \langle u, f(t)\rangle]\ \mathrm{d}t = 0$$

et l'intégrande est continue, positive donc identiquement nul d'où l'égalité dans Cauchy-Schwarz ce qui signifie que $f(t)$ est positivement colinéaire à u. On conclut

$$\boxed{\text{L'égalité a lieu si et seulement si } f = \varphi \cdot u \text{ avec } u \in \mathrm{E} \text{ normé et } \varphi \in \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R}_+).}$$

Exercice 6 (***)

Soit $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$. On pose $\qquad \forall x \in \mathrm{I} \smallsetminus \{1\} \qquad f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \smallsetminus \{1\}$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1. On note g ce prolongement.
3. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Corrigé : On pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ pour $x > 1$ et $\Psi(x) = \displaystyle\int_{1/2}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ pour $x \in]\,0\,;1\,[$. On a respectivement $\Phi \in \mathscr{C}(]\,1\,;+\infty\,[, \mathbb{R})$ et $\Psi \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;1\,[, \mathbb{R})$ d'après le théorème fondamental d'analyse. Puis

$$\forall x > 1 \qquad f(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in]\,0\,;1\,[\qquad f(x) = \Psi(x^2) - \Psi(x)$$

Par composition, on conclut $\qquad \boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I} \smallsetminus \{1\}, \mathbb{R})}$

2. Avec le changement de variable $u = \ln(t) \iff t = \mathrm{e}^u$ de classe $\mathscr{C}^1$, il vient

$$\forall x \in \mathrm{I} \smallsetminus \{1\} \qquad f(x) = \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$$

Distinguons les cas $x > 1$ et $x < 1$. Soit $x > 1$. La fonction exp étant croissante, on a l'encadrement

$$\forall x > 1 \qquad \forall u \in [\ln(x)\,; 2\ln(x)\,] \qquad \frac{x}{u} \leqslant \frac{\mathrm{e}^u}{u} \leqslant \frac{x^2}{u}$$

et après intégration

$$\forall x > 1 \qquad x\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant f(x) \leqslant x^2 \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \iff \ln(2)\, x \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)\, x^2$$

Faisant tendre $x \to 1^+$, il vient par encadrement que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} \ln(2)$. Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$. On a $\ln(x) < 0$ puis

$$\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \forall u \in [\,2\ln(x)\,;\ln(x)\,] \qquad \frac{x}{u} \leqslant \frac{\mathrm{e}^u}{u} \leqslant \frac{x^2}{u}$$

et après intégration

$$\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\qquad x\int_{2\ln(x)}^{\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant -f(x) \leqslant x^2 \int_{2\ln(x)}^{\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \iff x^2\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x\ln(2)$$

Faisant tendre $x \to 1^-$, il vient par encadrement que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ln(2)$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ se prolonge par continuité en } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \setminus \{1\} \\ \ln(2) & \text{si } x = 1 \end{cases}.}$$

4. Par construction, on a $g \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathrm{I} \setminus \{1\}\,,\mathbb{R})$. Par dérivation, on a

$$\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{1\} \qquad g'(x) = f'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Avec l'équivalent usuel $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, il s'ensuit que $g'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 1$. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

Exercice 7 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$. Montrer

$$n\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Corrigé : On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Delta_n = n\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Soit n entier non nul. On a $\quad \Delta_n = n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\,\mathrm{d}t$

puis, on obtient $\quad \Delta_n = n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t-\frac{k}{n}\right)\right]\,\mathrm{d}t + \mathrm{U}_n$

avec

$$\mathrm{U}_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t-\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}t$$

Par convergence des sommes de Riemann avec f' continue sur $[\,0\,;1\,]$, il vient

$$\mathrm{U}_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Et, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right] \qquad \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t - \frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \|f''\|_\infty \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2$$

On en déduit après intégration et sommation

$$\Delta_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{U}_n$$

On conclut $\boxed{n\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(1)-f(0)}{2}}$

Exercice 8 (***)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sin(2\pi n!\mathrm{e}\,)$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin(2\pi n!\mathrm{e}\,)$

Corrigé : D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, on dispose de N entier tel que

$$2\pi n!\mathrm{e} = 2\pi\mathrm{N} + 2\pi\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

D'où $\quad 2\pi n!\mathrm{e} = 2\pi\mathrm{N} + \mathrm{o}(1)$ puis $\sin(2\pi n!\mathrm{e}\,) = \sin \mathrm{o}(1)$

Puis $$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

et comme précédemment $$2\pi n!\mathrm{e} = 2\pi\mathrm{N} + \frac{2\pi}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis $$n^2 \sin(2\pi n!\mathrm{e}\,) = n^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2\pi n + \mathrm{o}(n)$$

On conclut $\boxed{\sin(2\pi n!\mathrm{e}\,) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad n^2 \sin(2\pi n!\mathrm{e}\,) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty}$