2022 - CCINP - MP - Mathématiques 2

Un corrigé

EXERCICE 1

Q 1. On a $V(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}$ donc $\boxed{V(x_1,x_2)=x_2-x_1.}$

Soit un n-uplet $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$, tel qu'il existe deux indices $(i_0,j_0)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i_0\neq j_0$ et $x_{i_0}=x_{j_0}$.
Alors la matrice de Vandermonde $((x_j)^{i-1})_{1\le i,j\le n}$ possède deux colonnes identiques, les colonnes i et j, donc elle n'est pas inversible et son déterminant $V(x_1,\dots,x_n)$ est nul.
La formule annoncée est bien vérifiée dans ce cas : $V(x_1,\dots,x_n)=0=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

$\boxed{\text{Donc il suffit de faire la démonstration pour } n \text{ nombres complexes deux à deux distincts } x_1,\dots,x_n.}$

Q 2. • Soient $x_1,\dots,x_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. On considère la fonction

$$P:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \mapsto & \mathbb{C}\\ t & \mapsto & V(x_1,\dots,x_{n-1},t).\end{array}\right. .$$

En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, il existe des coefficients $a_0,\dots,a_{n-2}$ dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$P(t)=V(x_1,\dots,x_{n-1},t)=\begin{vmatrix}1 & \dots & 1 & 1\\ x_1 & \dots & x_{n-1} & t\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & t^{n-1}\end{vmatrix}=V(x_1,\dots,x_{n-1})t^{n-1}+a_{n-2}t^{n-2}+\dots+a_1t+a_0.$$

Donc $\boxed{P \text{ est une fonction polynomiale de degré au plus } n-1, \text{ et le coefficient devant } t^{n-1} \text{ vaut } V(x_1,\dots,x_{n-1}).}$

• D'après la question **Q 1**, on a $\forall k\in[\![1,n-1]\!], P(x_k)=0$ donc P possède $n-1$ racines distinctes $x_1,\dots,x_{n-1}$. D'où

$$\forall t\in\mathbb{C},\quad P(t)=V(x_1,\dots,x_{n-1})\prod_{k=1}^{n-1}(t-x_k).$$

En particulier, on obtient la relation de récurrence :

$$V(x_1,\dots,x_n)=P(x_n)=V(x_1,\dots,x_{n-1})\prod_{k=1}^{n-1}(x_n-x_k).$$

• Montrons par récurrence sur $n\ge 2$:

$$(H_n):\text{si } (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n \text{ sont deux à deux distincts, alors } V(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

Initialisation : cas $n=2$. Soit $x_1\neq x_2$ deux nombres complexes.
On a montré à la question **Q 1** que $V(x_1,x_2)=x_2-x_1=\prod\limits_{1\le i<j\le 2}(x_j-x_i)$.

Hérédité : supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons-le au rang n.
Soient $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ deux à deux distincts.
Par hypothèse de récurrence, $V(x_1,\dots,x_{n-1})=\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}(x_j-x_i)$. Il vient

$$V(x_1,\dots,x_n)=V(x_1,\dots,x_{n-1})\left(\prod_{k=1}^{n-1}(x_n-x_k)\right)=\left(\prod_{1\le i<j\le n-1}(x_j-x_i)\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}(x_n-x_k)\right)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i),$$

ce qui achève la récurrence.

- Le résultat est encore valable si les x_k ne sont pas deux à deux distincts (d'après la question **Q 2**), d'où :

$$\boxed{\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n,\quad V(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).}$$

Q 3. Soit la matrice A suivante, que l'on transpose :

$$A=(i^j)_{1\le i,j\le n}=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\2&2^2&\dots&2^n\\\vdots&&&\vdots\\n&n^2&\dots&n^n\end{pmatrix},\quad {}^tA=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\1&2^2&\dots&n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2^n&\dots&n^n\end{pmatrix}.$$

Par multilinéarité du déterminant :

$$\det(A)=\det({}^tA)=2\times 3\times\ldots\times n\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\1&2&\dots&n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2^{n-1}&\dots&n^{n-1}\end{vmatrix}=n!\;V(1,2,\dots,n).$$

Ainsi

$$\det(A)=n!\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)=n!\prod_{j=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(j-i)\right)=n!\prod_{j=2}^{n}(j-1)!=n!\prod_{j=1}^{n-1}j!=\prod_{j=1}^{n}j!=\prod_{j=2}^{n}j!\,.$$

On a ainsi $\boxed{\det(A)=n!\;V(1,2,\dots,n)=\prod_{j=2}^{n}j!=\prod_{k=2}^{n}k^{n+1-k}.}$

Q 4.
- Soit $n\ge 2$. On pose $\forall k\in[\![1,n]\!], a_k=e^{ik\pi/n}$.
Les $(a_k)_{1\le k\le n}$ sont des nombres complexes deux à deux distincts et tous non nuls, car ce sont des racines $(2n)$-ièmes de l'unité distinctes. La somme suivante fait apparaître une somme géométrique de raison $e^{i2\pi/n}\neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ik\pi/n}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}e^{ik2\pi/n}=\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik2\pi/n}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i2\pi/n}\right)^k=\frac{1-\left(e^{i2\pi/n}\right)^n}{1-e^{i2\pi/n}}=\frac{1-1}{1-e^{i2\pi/n}}=0.$$

$$\boxed{\text{En posant } \forall k\in[\![1,n]\!], a_k=e^{ik\pi/n}, \text{ on a } \sum_{k=1}^{n}a_k^2=0 \text{ et les } (a_k)_{1\le k\le n} \text{ sont deux à deux distincts et tous non nuls.}}$$

- Soient n nombres complexes $x_1,\dots,x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls.
On suppose par l'absurde que toutes les sommes $\sum_{k=1}^{n}x_k,\ \sum_{k=1}^{n}x_k^2,\dots,\sum_{k=1}^{n}x_k^n$ sont nulles. Posons :

$$B=(x_j^i)_{1\le i,j\le n}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&\dots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\dots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^n&x_2^n&\dots&x_n^n\end{pmatrix}.$$

On effectue l'opération suivante sur les colonnes de B : $C_1\leftarrow C_1+C_2+\ldots+C_n$, i.e. on ajoute à la première colonne de B toutes les autres colonnes. Cela ne modifie pas le déterminant de B.

$$\det(B)=\det\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}x_k&x_2&\dots&x_n\\\sum_{k=1}^{n}x_k^2&x_2^2&\dots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sum_{k=1}^{n}x_n&x_2^n&\dots&x_n^n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0&x_2&\dots&x_n\\0&x_2^2&\dots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^n&\dots&x_n^n\end{pmatrix}=0.$$

Calculons $\det(B)$ en faisant apparaître un déterminant de Vandermonde. Par multilinéarité du déterminant :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = x_1x_2\dots x_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) V(x_1,\dots x_n).$$

Les x_k sont tous non nuls, donc $\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \neq 0$.

Les x_k sont deux à deux distincts, donc $V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i) \neq 0$.

Il vient $0 = \det(B) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) V(x_1,\dots x_n) \neq 0$, ce qui est absurde.

Donc $\boxed{\text{l'une au moins des sommes } \sum_{k=1}^{n} x_k,\ \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \dots, \sum_{k=1}^{n} x_k^n \text{ est non nulle.}}$

EXERCICE 2

Q 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque $\|\ \|$ est une norme d'algèbre, on a par récurrence immédiate sur $k \geq 1$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. Donc

$$\forall k \geq 1, \quad \left\|\frac{1}{k!}A^k\right\| = \frac{1}{k!}\left\|A^k\right\| \leq \frac{1}{k!}\|A\|^k.$$

La série exponentielle $\sum_{k\geq 1} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge, donc la série $\sum_{k\geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!} = \|I_n\| + \sum_{k\geq 1} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge.

Par règle de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geq 0} \left\|\frac{1}{k!}A^k\right\|$ converge, donc la série matricielle $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$ converge absolument.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La série matricielle } \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k \text{ converge absolument, dans l'espace vectoriel normé } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \text{qui est de dimension finie, donc cette série converge, vers sa somme notée } e^A.\end{array}}$$

Q 6. On considère la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} f_k$ où

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_k : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \frac{1}{k!}A^k \end{array} \right. .$$

Soit un réel $R > 0$. On note $B(0,R) : \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\| < R\}$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon R. On a

$$\forall A \in B(0,R), \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \|f_0(A)\| & = & \|I_n\|. \\ \forall k \geq 1, \quad \|f_k(A)\| & = & \left\|\frac{1}{k!}A^k\right\| = \frac{1}{k!}\left\|A^k\right\| \leq \frac{1}{k!}\|A\|^k \leq \frac{R^k}{k!}. \end{array}\right.$$

On en déduit que chaque fonction f_k est bornée sur $B(0,R)$, avec

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \|f_0\|_{\infty,B(0,R)} & = & \sup_{A\in B(0,R)} \|f_0(A)\| & = & \|I_n\|. \\ \forall k \geq 1, \quad \|f_k(A)\|_{\infty,B(0,R)} & = & \sup_{A\in B(0,R)} \|f_k(A)\| & \leq & \frac{R^k}{k!}. \end{array}\right.$$

La série exponentielle $\sum_{k\geq 1} \frac{R^k}{k!}$ converge, donc la série $\|I_n\| + \sum_{k\geq 1} \frac{R^k}{k!}$ converge.

Par règle de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geq 0} \|f_k\|_{\infty, B(0,R)}$ converge,

donc la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $B(0,R)$.

(i) Pour tout $k \geq 0$, $f_k : A \mapsto \frac{1}{k!}A^k$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car polynomiale en les coefficients de la matrice A. Donc f_k est continue sur $B(0,R)$.

(ii) La série de fonctions $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $B(0,R)$.

Par théorème de continuité pour les séries de fonctions, la somme $A \mapsto e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$ est continue sur $B(0,R)$.

Ceci est valable pour tout $R > 0$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \bigcup_{R>0} B(0,R)$.

$\boxed{\text{Donc l'application } A \mapsto e^A \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

Q 7. • Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|H\|}\left\|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}H^k\right\| &\leq \frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\left\|\frac{1}{k!}H^k\right\| = \frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left\|H^k\right\| \leq \frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|H\|^k \\
&= \frac{1}{\|H\|}\left(e^{\|H\|} - 1 - \|H\|\right) = \frac{1}{\|H\|}o(\|H\|) = o(1) \underset{H\to 0}{\to} 0,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le développement limité en 0 de l'exponentielle réelle.

Donc $\boxed{\lim_{H\to 0} \frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k = 0.}$

• Posons pour $H \neq 0$,

$$\varepsilon(H) = \frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k \underset{H\to 0}{\to} 0.$$

Lorsque $H \to 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
e^{0+H} = e^H &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k = I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k \\
&= I_n + H + \|H\|\left(\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right) = I_n + H + \|H\|\varepsilon(H) \\
&= e^0 + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(H) + o(\|H\|).
\end{aligned}$$

Ainsi lorsque $H \to 0$, on a $\boxed{e^{0+H} = e^0 + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(H) + o(\|H\|)}$ où l'identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est linéaire.

Donc $\boxed{\text{l'application } A \mapsto e^A \text{ est différentiable en la matrice nulle 0, et } d\exp(0) = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.}$

PROBLEME

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Q 8. On a
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = (a-b)I_3 + bJ \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice A est symétrique réelle : $A \in \mathcal{S}_3$.
Les matrices A et J sont symétriques réelles, donc diagonalisables en base orthonormale d'après le théorème spectral.
On a $\mathrm{rg}(J) = 1$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(J)) = 2$ par le théorème du rang. Ainsi 0 est valeur propre de J de multiplicité $\mathrm{mult}(0) = \dim \mathrm{Ker}(J) = 2$ dans χ_J, car J est diagonalisable. Soit λ la dernière valeur propre de J. La trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc $\mathrm{Tr}(J) = 3 = 2 \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda$, d'où $\lambda = 3$.
Ainsi le spectre de J vaut $\mathrm{Sp}(J) = \{0, 3\}$.
Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $D = \mathrm{Diag}(3,0,0)$ diagonale, telles que $P^{-1}JP = D$. On en déduit que
$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}\Big((a-b)I_3 + bJ\Big)P = (a-b)P^{-1}I_3P + bP^{-1}JP = (a-b)I_3 + bD \\ &= \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{a+2b, a-b\}.}$ Donc
$$\boxed{A \in \mathcal{S}_3^+ \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+ \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+2b & \geq 0. \\ a & \geq b. \end{cases}}$$

Q 9.
- On remarque que $J^2 = 3J$.
  Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ que $J^k = 3^{k-1}J$.
  Initialisation : $k = 1$. $J^1 = J = 3^0 J$.
  Hérédité : supposons le résultat vrai au rang k. Par hypothèse de récurrence, $J^k = 3^{k-1}J$.
  Donc $J^{k+1} = J^kJ = (3^{k-1}J)J = 3^{k-1}3J = 3^kJ$, ce qui achève la réccurence.
  Ainsi $\boxed{\forall k \geq 1, J^k = 3^{k-1}J.}$
- Cette relation n'est $\boxed{\text{pas valable pour } k=0}$ car $J^0 = I_3 \neq 3^{-1}J$.
- Calculons e^A. On utilise $A = (a-b)I_3 + bJ$.
  Puisque les matrices $(a-b)I_3$ et bJ commutent :
  $$e^A = e^{(a-b)I_3 + bJ} = e^{(a-b)I_3}e^{bJ} = \left(e^{a-b}I_3\right)e^{bJ} = e^{a-b}e^{bJ}.$$
  Or
  $$e^{bJ} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(bJ)^k = I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!}3^{k-1}J = I_3 + 3^{-1}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(3b)^k}{k!}\right)J = I_3 + 3^{-1}e^{3b}J.$$
  On obtient
  $$e^A = e^{a-b}\left(I_3 + 3^{-1}e^{3b}J\right) = e^{a-b}I_3 + 3^{-1}e^{a+2b}J = 3^{-1}e^{a+2b}(3e^{-3b}I_3 + J).$$
  Finalement,
  $$\boxed{e^A = 3^{-1}e^{a+2b}(3e^{-3b}I_3 + J).} \quad \boxed{e^A = 3^{-1}e^{a+2b}\begin{pmatrix} 3e^{-3b}+1 & 1 & 1 \\ 1 & 3e^{-3b}+1 & 1 \\ 1 & 1 & 3e^{-3b}+1 \end{pmatrix}.}$$
- La matrice e^A est symétrique réelle et possède la même forme que la matrice A. Le coefficient $3^{-1}e^{a+2b} \geq 0$ et
  $$\begin{cases} \Big((3e^{-3b}+1) + 2\Big) & \geq 0, \\ 3e^{-3b}+1 & \geq 1. \end{cases}$$
  Donc les deux conditions de la question **Q 8** sont remplies pour la matrice e^A. Ainsi $\boxed{e^A \in \mathcal{S}_3^+.}$

Q 10. • Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Posons $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array} \right.$.

L'application f est linéaire car

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall(M_1,M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,$$
$$f(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = P(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)P^{-1} = \lambda_1 PM_1P^{-1} + \lambda_2 PM_2P^{-1} = \lambda_1 f(M_1) + \lambda_2 f(M_2).$$

L'application f est linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie,
donc $\boxed{f : M \mapsto PMP^{-1} \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

• Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$. Par le théorème spectral, la matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormale. Il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D = \mathrm{Diag}(d_1,\dots,d_n)$.
On a donc $A = PDP^{-1}$.

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{d_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{d_n^k}{k!} \end{pmatrix} \underset{N\to+\infty}{\to} e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (PDP^{-1})^k = P \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \right) P^{-1}$$

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \right) = e^D$. Par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$:

$$e^A = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k \right) = \lim_{N\to+\infty} \left(P \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \right) P^{-1} \right) = Pe^DP^{-1}.$$

Finalement, $\boxed{e^A = Pe^DP^{-1}.}$ Ainsi $\boxed{e^A \text{ est semblable à la matrice diagonale } e^D = \mathrm{Diag}(e^{d_1},\dots,e^{d_n}).}$

• On a montré qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $e^A = Pe^DP^{-1} = Pe^D\,{}^tP$. Donc ${}^t(e^A) = P\,{}^t(e^D)\,{}^tP = e^A$ et la matrice e^A est symétrique.
De plus, e^A et e^D sont semblables donc ont même spectre. Il vient

$$\mathrm{Sp}(e^A) = \mathrm{Sp}(e^D) = \{e^{d_1},\dots,e^{d_n}\} \subset \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+.$$

Donc $\boxed{e^A \in \mathcal{S}_n^+.}$

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Q 11. On suppose que $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3^+$. D'après la question **Q 8**, on a $a + 2b \geq 0$ et $a \geq b$. Alors

$$E(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^b & e^b \\ e^b & e^a & e^b \\ e^b & e^b & e^a \end{pmatrix}.$$

La matrice $E(A)$ est symétrique réelle.
D'une part, $e^a + 2e^b \geq 0$; d'autre part, $a \geq b$ donc $e^a \geq e^b$ par croissance de l'exponentielle.
Les deux conditions de la question **Q 8** sont remplies pour la matrice $E(A)$, donc $\boxed{E(A) \in \mathcal{S}_3^+.}$

Q 12. • Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ une matrice diagonale telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], d_i \geq 0$. Alors

$$\forall Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tYDY = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 y_1 \\ \vdots \\ d_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} d_i (y_i)^2 \geq 0.$$

$\boxed{\text{Si } D \text{ est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont positifs ou nuls, alors } \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tYDY \geq 0.}$

• Soit $A \in \mathcal{S}_n$.
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^+$. Alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
Par le théorème spectral, la matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormale.
Il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$, où D est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont positifs ou nuls, puisque $\mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après le point précédent :

$${}^tXAX = {}^tX(PD{}^tP)X = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = {}^tYDY \geq 0 \text{ en posant } Y = {}^tPX.$$

D'où $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$.
$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Alors il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, vecteur propre (donc non nul) de A associé à la valeur propre λ : $AX = \lambda X$. Il vient

$${}^tXAX = {}^tX\lambda X = \lambda {}^tXX \geq 0.$$

Or $X \neq 0$ donc ${}^tXX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 > 0$. On en déduit que $\lambda \geq 0$, donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathcal{S}_n^+$.
On a montré l'équivalence : $\boxed{\text{Pour } A \in \mathcal{S}_n, \text{ on a : } \quad (A \in \mathcal{S}_n^+) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0).}$

Q 13. • Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$ et α, β deux réels positifs. Alors $(\alpha A + \beta B)$ est symétrique réelle.
D'après la question **Q 12**, puisque A et B sont dans $\mathcal{S}_n^+$, on a :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX(\alpha A + \beta B)X = \underbrace{\alpha}_{\geq 0} \underbrace{({}^tXAX)}_{\geq 0} + \underbrace{\beta}_{\geq 0} \underbrace{({}^tXBX)}_{\geq 0} \geq 0.$$

On en déduit que $\boxed{\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^+)^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad (\alpha A + \beta B) \in \mathcal{S}_n^+.}$

• Posons $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. A_0 et B_0 sont symétriques.
$\mathrm{Sp}(A_0) = \{1, 0\} \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Sp}(B_0) = \{2, 0\} \subset \mathbb{R}_+$, donc A_0 et B_0 sont dans $\mathcal{S}_2^+$.
Mais $A_0 B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique donc $A_0 B_0 \notin \mathcal{S}_2^+$.
Pour $n \geq 2$, soient les matrices diagonales par blocs : $A = \mathrm{Diag}(A_0, 0_{n-2})$ et $B = \mathrm{Diag}(B_0, 0_{n-2})$.
A et B sont symétriques avec $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 0\} \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{2, 0\} \subset \mathbb{R}_+$, donc A et B sont dans $\mathcal{S}_n^+$.
Mais AB n'est pas symétrique :

$$AB = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_n^+.$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 2, \text{ il existe des matrices } A \text{ et } B \text{ de } \mathcal{S}_n^+ \text{ telles que } AB \notin \mathcal{S}_n^+.}$

Q 14. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$. A est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormale.
Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale réelle, telles que $P^{-1}AP = {}^tPAP = D$.
On a donc $A = PDP^{-1}$.
De plus, $\left\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\right\} = \mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i \geq 0$.
Posons $\Delta = \mathrm{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ et $R = P\Delta P^{-1} = P\Delta {}^tP$. Alors

$$R^2 = (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

R est symétrique réelle car : ${}^tR = {}^t(P\Delta {}^tP) = P\Delta {}^tP = R$.
R est semblable à Δ donc a même spectre : $\mathrm{Sp}(R) = \mathrm{Sp}(\Delta) = \left\{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right\} \subset \mathbb{R}_+$. D'où $R \in \mathcal{S}_n^+$.
Ainsi A admet une racine carrée R dans $\mathcal{S}_n^+$.

$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \in \mathcal{S}_n^+, \text{ il existe } R \in \mathcal{S}_n^+ \text{ telle que } A = R^2.}$

Q 15. • Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$.
D'après la question **Q 14**, il existe $U = (u_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$ et $V = (v_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$, telles que $A = U^2$ et $B = V^2$.
On pose $C = (c_{i,j}) = A * B$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\begin{array}{rclclcll} a_{i,j} & = & (U^2)_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{i,k}u_{k,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j} & \text{car } U \text{ est symétrique.} \\ b_{i,j} & = & (V^2)_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} v_{i,\ell}v_{\ell,j} & = & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} v_{\ell,i}v_{\ell,j} & \text{car } V \text{ est symétrique.} \end{array}$$

D'où

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \boxed{c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} v_{\ell,i}v_{\ell,j}\right).}$$

• D'après l'expression précédente, on a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_{j,i} = c_{i,j}$. Donc $C = A * B$ est symétrique.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tX(A*B)X = {}^tXCX &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_ix_j &&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}v_{\ell,i}v_{\ell,j}x_ix_j \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{k,i}v_{\ell,i}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} u_{k,j}v_{\ell,j}x_j\right) &&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{k,i}v_{\ell,i}x_i\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

en observant que l'on obtient deux fois la même somme.
On a $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX(A*B)X \geq 0$. D'après la question **Q 12**, la matrice $A * B$ est dans $\mathcal{S}_n^+$.

$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices de } \mathcal{S}_n^+, \text{ alors } A * B \in \mathcal{S}_n^+.}$

Q 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Par définition, on a $\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A^{*p})_{i,j} = (a_{i,j})^p$. Donc

$$(T_N)_{i,j} = \left(\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}A^{*p})_{i,j}\right)_{i,j} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}(a_{i,j})^p \underset{N\to+\infty}{\to} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}(a_{i,j})^p = e^{a_{i,j}} = (E(A))_{i,j}$$

On en déduit que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\boxed{\lim_{N\to+\infty} T_N = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}A^{*p})_{i,j}\right) = E(A).}$

Q 17. • Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose

$$f_X : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & {}^tXMX \end{array} \right. .$$

L'application f_X est linéaire car

$$\begin{aligned} &\forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (M_1,M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \\ &f_X(\lambda_1M_1 + \lambda_2M_2) = {}^tX(\lambda_1M_1 + \lambda_2M_2)X = \lambda_1{}^tXM_1X + \lambda_2{}^tXM_2X = \lambda_1f_X(M_1) + \lambda_2f_X(M_2). \end{aligned}$$

L'application f_X est linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie,
donc $\boxed{f_X : M \mapsto {}^tXMX \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

- Montrons que $\mathcal{S}_n^+$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n^+ &= \{A \in \mathcal{S}_n, \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0\} \\
&= \mathcal{S}_n \cap \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0\} \\
&= \mathcal{S}_n \cap \left(\bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0\} \right) \\
&= \mathcal{S}_n \cap \left(\bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_X(A) \in [0, +\infty[\} \right) \\
&= \mathcal{S}_n \cap \left(\bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f_X^{-1}([0, +\infty[) \right).
\end{aligned}$$

  - ⋆ L'image réciproque d'un fermé par une application continue est continue.
    L'ensemble $[0, +\infty[$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.
    Pour chaque $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, f_X est une application continue.
    Donc pour chaque $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $f_X^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  - ⋆ Posons $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA - A \end{array} \right.$. Alors $\mathcal{S}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad {}^tA = A\} = g^{-1}(\{0_n\})$.
    Le singleton $\{0_n\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
    La transposition est continue, car linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. Donc g est continue.
    Alors $\mathcal{S}_n = g^{-1}(\{0_n\})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  - ⋆ Une intersection de fermés est fermée. Donc l'intersection $\displaystyle\bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f_X^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
    puis l'intersection $\mathcal{S}_n \cap \left(\displaystyle\bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f_X^{-1}([0, +\infty[) \right)$ est fermée.
  - ⋆ Ainsi $\mathcal{S}_n^+$ est fermée et incluse dans $\mathcal{S}_n$, donc $\boxed{\mathcal{S}_n^+ \text{ est une partie fermée de } \mathcal{S}_n.}$

- Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$.
  - ⋆ Montrons que par récurrence sur $p \geq 1$ que $A^{*p} \in \mathcal{S}_n^+$.
    Initialisation : $p = 1$. On a $A^{*1} = A \in \mathcal{S}_n^+$.
    Hérédité : on suppose que $A^{*p} \in \mathcal{S}_n^+$.
    D'après la question **Q 15**, $\mathcal{S}_n^+$ est stable par produit de Hadamard.
    Donc $A^{*(p+1)} = A * (A^{*p}) \in \mathcal{S}_n^+$, ce qui achève la récurrence.
    Ainsi $\boxed{\forall p \geq 1, A^{*p} \in \mathcal{S}_n^+.}$
  - ⋆ Montrons que $A^{*0} \in \mathcal{S}_n^+$. On pose $J = A^{*0} = (1)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n$.
    Comme dans la question **Q 8**, J est symétrique réelle donc diagonalisable.
    $\mathrm{rg}(J) = 1$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(J)) = n - 1$ donc 0 est valeur propre de J de multiplicité $n - 1$ dans χ_J.
    La dernière valeur propre vaut n car $\mathrm{Tr}(J) = n = (n-1) \times 0 + 1 \times \lambda$.
    Donc $\mathrm{Sp}(J) = \{n, 0\} \subset \mathbb{R}_+$ et $\boxed{A^{*0} \in \mathcal{S}_n^+.}$
  - ⋆ D'après la question **Q 13**, $\mathcal{S}_n^+$ est stable par combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls.
    Or $\forall p \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{p!} \geq 0$ et $A^{*p} \in \mathcal{S}_n^+$, donc $T_N = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} A^{*p} \in \mathcal{S}_N^+$. Ainsi $\boxed{\forall N \geq 1, T_N \in \mathcal{S}_n^+.}$
  - ⋆ D'après la question **Q 16**, $E(A) = \displaystyle\lim_{N \to +\infty} T_N$ où $\forall N \in \mathbb{N}, \quad T_N \in \mathcal{S}_N^+$.
    On vient de montrer que $\mathcal{S}_n^+$ est une partie fermée, donc la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n^+$ est encore dans $\mathcal{S}_n^+$, donc $E(A) = \displaystyle\lim_{N \to +\infty} T_N \in \mathcal{S}_N^+$.
    $\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{S}_n^+, \text{ alors } E(A) \in \mathcal{S}_n^+.}$