

**CONCOURS COMMUN INP 2022**  
**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP**  
**MATHÉMATIQUES 2**

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

**EXERCICE 1**

Pour  $n$  entier,  $n \geq 2$ , on définit le déterminant de Vandermonde de  $n$  nombres complexes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  par :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a :  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ .

**Q1.** Calculer  $V(x_1, x_2)$ . Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour  $n$  nombres complexes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  deux à deux distincts.

Dans la suite,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont  $n$  nombres complexes deux à deux distincts.

**Q2.** On considère la fonction  $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$ .

Démontrer que  $P$  est une fonction polynomiale de degré au plus  $n - 1$  et justifier que le coefficient de  $t^{n-1}$  est un déterminant de Vandermonde.

Démontrer par récurrence que  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ .

**Q3.** Première application

Calculer le déterminant de la matrice  $A = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde  $V(1, 2, \dots, n)$ .

**Q4.** Deuxième application

Donner un exemple de  $n$  nombres complexes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  deux à deux distincts et tous non nuls, tels que  $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 0$ .

Soit  $n$  nombre complexes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes  $\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k^2, \sum_{k=1}^n x_k^3, \dots, \sum_{k=1}^n x_k^n$  est non nulle.

On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

## EXERCICE 2

Dans cet exercice,  $\|\cdot\|$  désigne une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . c'est-à-dire une norme vérifiant, pour tout couple  $(A, B)$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A.B\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**Q5.** Démontrer que pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$  converge. On notera  $e^A$  sa somme.

**Q6.** Démontrer que l'application  $A \mapsto e^A$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q7.** Si  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon  $r > 0$ , déterminer la limite de  $\frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$  lorsque  $H$  tend vers 0.

En déduire que l'application  $A \mapsto e^A$  est différentiable en la matrice 0.

On précisera sa différentielle en 0.

# PROBLÈME

Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ .

Dans ce problème, on note  $\mathcal{S}_n$  l'espace vectoriel des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétriques.

On dit que la matrice  $A \in \mathcal{S}_n$  est symétrique positive lorsque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. On note  $\mathcal{S}_n^+$  l'ensemble des matrices symétriques positives.

## Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Pour  $a$  et  $b$  deux réels, on note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Q8.** Démontrer, en détaillant les calculs, que  $A \in \mathcal{S}_3^+$ , si et seulement si,  $(a + 2b \geq 0$  et  $a \geq b)$ .

**Q9.** Calculer  $J^k$  pour tout entier  $k$  non nul. Cette relation est-elle valable pour  $k = 0$  ?

En utilisant la relation  $A = (a - b)I_3 + bJ$ , calculer et expliciter  $e^A$ .

On pourra utiliser sans démonstration que, si deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  commutent, alors  $e^{A+B} = e^A e^B$ .

Vérifier que  $e^A \in \mathcal{S}_3^+$ .

**Q10.** Soit  $P$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Justifier que l'application  $M \mapsto PMP^{-1}$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si  $A \in \mathcal{S}_n^+$  est semblable à une matrice diagonale  $D$ , déterminer une matrice diagonale semblable à la matrice  $e^A$ . En déduire que  $e^A \in \mathcal{S}_n^+$ .

## Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Dans cette partie, pour une matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $E(A)$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , de terme général  $e^{a_{i,j}}$  :  $E(A) = (e^{a_{i,j}})$ .

Nous allons démontrer que si  $A \in \mathcal{S}_n^+$ , alors  $E(A) \in \mathcal{S}_n^+$ .

On définit le produit de Hadamard de deux matrices  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  noté  $*$  par :

$$A * B = (a_{i,j} b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note le produit usuel de deux matrices  $A$  et  $B$  par  $AB$ .

On confond une matrice de  $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$  avec son terme réel.

**Q11.** Vérifier que, lorsque la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3^+$ , la matrice  $E(A) \in \mathcal{S}_3^+$ .

**Q12.** Si  $D$  est une matrice diagonale dont tous les termes sont positifs ou nuls et si  $Y$  est matrice de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , quel est le signe de  ${}^tYDY$  ?

En déduire qu'une matrice  $A$  de  $\mathcal{S}_n$  appartient à  $\mathcal{S}_n^+$  si, et seulement si, pour toute matrice  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  on a  ${}^tXAX \geq 0$ .

**Q13.** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n^+$  et  $\alpha, \beta$  deux réels positifs, démontrer, en utilisant la question **Q12**, que  $\alpha A + \beta B$  est une matrice de  $\mathcal{S}_n^+$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n^+$  a-t-on nécessairement  $AB \in \mathcal{S}_n^+$  ?

**Q14.** Si  $A \in \mathcal{S}_n^+$ , démontrer qu'il existe une matrice  $R \in \mathcal{S}_n^+$  telle que  $A = R^2$ .

**Q15.** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n^+$ , si on pose  $A = U^2$  et  $B = V^2$  avec  $U = (u_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$ ,  $V = (v_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$  et si  $A * B = (c_{i,j})$ , vérifier que, pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

$$c_{i,j} = \left( \sum_{k=1}^n u_{k,i} u_{k,j} \right) \left( \sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i} v_{\ell,j} \right).$$

En déduire que, si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n^+$ , on a  $A * B \in \mathcal{S}_n^+$ .

**Q16.** Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout entier naturel  $p \geq 2$ , on note  $A^{*p}$  la matrice  $A * A * \dots * A$  ( $p$  fois).

On note  $A^{*0} = (1)$  la matrice dont tous les termes sont égaux à 1 et  $A^{*1} = A$ .

Soit une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , déterminer la limite de la suite de matrices  $(T_N)$  définie pour tout entier naturel  $N$  non nul par  $T_N = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^{*p}$ .

**Q17.** Pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , justifier que l'application  $M \mapsto {}^tXMX$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , puis démontrer que  $\mathcal{S}_n^+$  est une partie fermée de  $\mathcal{S}_n$ . En déduire que si  $A \in \mathcal{S}_n^+$  alors  $E(A) \in \mathcal{S}_n^+$ .

FIN