I Suites et intégrales

I.A - Étude d'une intégrale à paramètre

I.A.1) On considère la fonction $\varphi\ :\ \begin{cases} [0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt} \end{cases}$

i Soit $t\in]0,+\infty[$. La fonction $x\mapsto\varphi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

ii Soit $x\in[0,+\infty[$. La fonction $t\mapsto\varphi(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

iii Soit $x\in[0,+\infty[$. On considère la fonction $g:t\mapsto\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ qui est définie, positive et continue sur $]0,+\infty[$
De sorte que :

$$\forall t\in[0,+\infty[,\forall x\in[0,+\infty[,|\varphi(x,t)|\leqslant g(t)$$

Quand $t\to0$, $g(t)=\dfrac{1-1+t^2/2+\mathrm{o}(t^2)}{t^2}$ donc $g(t)\to1/2$
Ainsi g est prolongeable par continuité en 0, donc g est intégrable sur $]0,1]$
Pour $t\geqslant1$, $|g(t)|\leqslant2/t^2$, or $t\mapsto2/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
donc par comparaison à une fonction positive g est intégrable sur $[1,+\infty[$
Ainsi g est intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a l'hypothèse de domination :

Avec i, ii et iii, $\boxed{f:x\mapsto\int_0^\infty\varphi(x,t)\mathrm{d}t \text{ est définie et continue sur } [0,+\infty[}$

Montrons maintenant la classe $\mathcal{C}^2$ de f avec le théorème de Leibniz :

i Soit $t\in]0,+\infty[$. La fonction $x\mapsto\varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$
de dérivées successives : $x\mapsto\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)=\dfrac{\cos t-1}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ et $x\mapsto\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)=(1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}$

ii Soit $x\in[0,+\infty[$.
La fonction $t\mapsto\varphi(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la domination précédente.
Les fonctions $t\mapsto\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ et $t\mapsto\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $]0,+\infty[$.
De façon analogue à ci-dessus : on a $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)=0$ ce qui donne l'intégrabilité de $t\mapsto\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ sur $]0,1]$
De plus par croissance comparée $\lim\limits_{t\to\infty}t^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)=0$ donc $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\underset{t\to\infty}{=}\mathrm{o}(1/t^2)$
donc par comparaison à une fonction positive $t\mapsto\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
ainsi $t\mapsto\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

iii Soit $a<b$ dans $]0,+\infty[$ et on pose $\mathrm{G}:t\mapsto\mathrm{e}^{-at}$
La fonction G est continue sur $[0,+\infty[$ et $\mathrm{G}(t)\underset{t\to\infty}{=}\mathrm{o}(1/t^2)$
donc G est intégrable sur sur $[0,+\infty[$ et on a l'hypothèse de domination :

$$\forall x\in[a,b],\ \forall t\geqslant0,\ \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant\mathrm{G}(t)$$

Avec i, ii et iii, $\boxed{f:x\mapsto\int_0^\infty\varphi(x,t)\mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[}$

et on a $f':x\mapsto\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos t-1}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ et $f'':x\mapsto\displaystyle\int_0^\infty(1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$

I.A.2) Pour $x\geqslant1$, je considère les fonctions $\psi_x:t\mapsto\dfrac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ et g de la question précédente.

i Pour $x\geqslant1$, ψ_x est continue sur $]0,+\infty[$

ii Pour $t>0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_x(t)=0$
donc la famille $(\psi_x)_{x\geqslant 1}$ converge simplement quand $x\to+\infty$ vers la fonction $t\mapsto 0$ sur $]0,+\infty[$.

iii La fonction $t\mapsto 0$ est continue sur $]0,+\infty[$

iv et on a l'hypothèse de domination avec la fonction g de la question précédente intégrable sur $]0,+\infty[$:

$$\forall x\geqslant 1, \forall t\in]0,+\infty[,\ |\psi_x(t)|\leqslant g(t)$$

Conclusion : Avec i, ii, iii et iv, on peut appliquer l'extension du théorème de convergence dominée qui donne l'intégrabilité de $t\mapsto 0$ sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^\infty \psi_x=\int_0^\infty 0$

Pour la limite de f' en $+\infty$, on utilise également l'extension du théorème de convergence dominée avec la fonction de domination $t\mapsto \dfrac{-\cos t+1}{t}\mathrm{e}^{-t}$ pour $x\geqslant 1$

On trouve ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0}$

I.A.3) Soit $x>0$. On a $f''(x)=\displaystyle\int_0^\infty(1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t=\int_0^\infty \mathrm{Re}\left((1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-xt}\right)\mathrm{d}t$

or $t\mapsto(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car continue et $\forall t\in]0,+\infty[$, $\left|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-xt}\right|\leqslant \mathrm{e}^{-xt}$

donc $f''(x)=\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t})\mathrm{d}t\right)$

or $\displaystyle\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t})\mathrm{d}t=\left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}}{x-\mathrm{i}}-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{t\to\infty}=\frac{-1}{x-\mathrm{i}}+\frac{1}{x}=-\frac{x+\mathrm{i}}{x^2+1}+\frac{1}{x}$

donc $\boxed{f'' : x\mapsto -\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x}\text{ sur l'intervalle }]0,+\infty[}$

Donc on peut trouver $\mathrm{K}\in\mathbb{R}$ tel que $f' : x\mapsto \ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\mathrm{K}$

De plus quand $x\to+\infty$, on a $\ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$

et $\dfrac{x^2}{x^2+1}\sim\dfrac{x^2}{x^2}=1$ donc $\dfrac{x^2}{x^2+1}\to 1$ par composition $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)\to 0$

donc $f'(x)\to\mathrm{K}$ donc $\mathrm{K}=0$ d'après la question précédente

On en déduit que $\boxed{\forall x>0,\ f'(x)=\ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)}$

I.A.4) On note $g : x\mapsto x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}$
g est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x>0$
On a $g'(x)=\ln(x)+1-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}=f'(x)$
donc on $g-f$ est constante sur $]0,+\infty[$.
quand $x\to+\infty$, $x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)=\dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)=\dfrac{-x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sim\dfrac{-x}{2}\dfrac{1}{x^2}$
donc $x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)\to 0$ et $-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\to 0$
ainsi $g(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ or $f(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-f(x))=0$ ainsi $\forall x>0$, $f(x)=g(x)$
de plus quand $x\to 0^+$, $x\ln(x)\to 0$ et $-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$
donc $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\dfrac{\pi}{2}$ or f et g coïncident sur $]0,+\infty[$
donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ or f est continue sur $[0,+\infty[$

Ainsi $\boxed{\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}}$

I.A.5) On a $\dfrac{\pi}{2} = f(0) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\mathrm{d}u$

Soit $s > 0$. La fonction $t \mapsto st$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$
On effectue alors le changement de variable $u = st$; $\mathrm{d}u = s\mathrm{d}t$ (qui donne l'existence de la nouvelle intégrale)

donc $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(st)}{(st)^2} s\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$

donc $s = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$ et $s = |s|$

pour $s = 0$, c'est évident donc $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $|s| = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$

or les fonctions $s \mapsto |s|$ et $s \mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$ sont paires

ce qui donne $\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ |s| = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t}$

I.B - Étude d'une suite d'intégrales

I.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $g_n : t \mapsto \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$
De plus $\forall t \in [1,+\infty[$, $|g_n(t)| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et quand $t \to 0$, $g_n(t) = \frac{1-(1+\mathcal{O}(t^2))^n}{t^2} = \mathcal{O}(1)$
comme en **I.A.1)**, on conclut à l'intégrabilité de g_n sur $]0,+\infty[$
d'où l'existence de u_n

et $u_{2n+2} - u_{2n} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\cos t)^{2n} - (\cos t)^{2n+2}}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{(\cos t)^{2n}(\sin t)^2}{t^2}\mathrm{d}t \geqslant 0$

d'où $\boxed{\text{l'existence de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et la croissance de la sous-suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}.}$

I.B.2) On a $u_1 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t = f(0) = \frac{\pi}{2}$

et $u_2 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$ or $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

donc $u_2 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t^2}\mathrm{d}t$

en utilisant **I.A.5**, on a donc $\dfrac{4}{\pi}u_2 = |2|$

On a montré que $\boxed{u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}}$

I.C - Calcul d'un équivalent de u_n

I.C.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $u \mapsto \sqrt{2u/n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$
On effectue le changement de variable $t = \sqrt{2u/n}$; $\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{n}\mathrm{d}u}{\sqrt{2u}}$

donc $u_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1-\Big(\cos(\sqrt{2u/n})\Big)^n}{2u/n}\frac{\sqrt{n}\mathrm{d}u}{\sqrt{2u}}$

On a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n \quad \text{avec} \quad v_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\Big(\cos(\sqrt{2u/n})\Big)^n}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u}$

I.C.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $\varphi : u \mapsto \Big(\cos(\sqrt{2u/n})\Big)^n$

Soit $u \in]0,1]$. On a $\varphi'(u) = \dfrac{-n}{2}\sqrt{\dfrac{2}{nu}}\sin(\sqrt{2u/n})\Big(\cos(\sqrt{2u/n})\Big)^{n-1}$

donc $|\varphi'(u)| = \left|\dfrac{\sin(\sqrt{2u/n})}{\sqrt{2u/n}}\right| \left|\cos(\sqrt{2u/n})\right|^{n-1} \leqslant \left|\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}\right|$ où $\theta = \sqrt{2u/n}$

Par inégalité de convexité, on a $\left|\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right| \leqslant 1$ donc a $|\varphi'(u)| \leqslant 1$

donc par inégalité des accroissements finis appliquée à φ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$
on a $|\varphi(0)-\varphi(u)| \leqslant 1 \times |u-0|$

On a montré que $\boxed{\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1],\ \left|1-\Big(\cos(\sqrt{2u/n})\Big)^n\right| \leqslant u}$

I.C.3) On note la fonction $\psi_n : u \mapsto \dfrac{1-\Big(\cos(\sqrt{2u/n})\Big)^n}{u\sqrt{u}}$

$(*)$ Les fonctions ψ_n sont continues sur $]0,+\infty[$

$(**)$ Soit $u>0$. Quand $n \to \infty$, on a $\cos(\sqrt{2u/n}) = 1 - \frac{u}{n} + \mathrm{o}(u/n)$
donc $\Big(\cos(\sqrt{2u/n})\Big)^n = \exp\Big(n\ln(\cos(\sqrt{2u/n}))\Big) = \exp\big(n\ln(1-\frac{u}{n}+\mathrm{o}(u/n))\big)$
or $\ln(1-\frac{u}{n}+\mathrm{o}(u/n)) \sim -\frac{u}{n}$ donc $n\ln(1-\frac{u}{n}+\mathrm{o}(u/n)) \to -u$
donc par composition $\exp\big(n\ln(1-\frac{u}{n}+\mathrm{o}(u/n))\big) \to \mathrm{e}^{-u}$ ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\psi_n(u) = \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$
donc la suite de fonctions (ψ_n) converge simplement vers la fonction $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$ sur $]0,+\infty[$

$(***)$ la fonction $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$ est continue sur $]0,+\infty[$

$(****)$ On considère la fonction $h : u \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{u}} & \text{si } u \in]0,1] \\ \frac{2}{u\sqrt{u}} & \text{sinon} \end{cases}$

On montre facilement que h est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a l'hypothèse domination

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ |\psi_n(x)| \leqslant h(x)$$

(sur $]0,1]$ on utilise **I.C.2**)

Avec $(*), (**), (***)$ et $(****)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui donne :

l'intégrabilité de $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$ sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty \psi_n = \int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ admet une limite finie } l \text{ vérifiant } l = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u}$

I.C.4) Sous réserve d'existence, on effectue dans l une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$
$u \mapsto 1-\mathrm{e}^{-u}$ et $u \mapsto -2u^{-1/2}$:

On a $l = \int\limits_0^{\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \Big[-2u^{-1/2}(1-\mathrm{e}^{-u})\Big]_{u\to 0}^{u\to\infty} - \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u}(-2u^{-1/2})\mathrm{d}u$

On a par produit $\lim\limits_{u\to\infty}(-2u^{-1/2}(1-\mathrm{e}^{-u})) = 0$

et quand $u \to 0$, on a $1-\mathrm{e}^{-u} \sim u$ donc $-2u^{-1/2}(1-\mathrm{e}^{-u}) \sim -2\sqrt{u} \to 0$

donc le bloc entre crochets vaut 0 ce qui valide l'intégration par parties

donc $l = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 2\sqrt{\pi}$ selon la relation admise

donc $l \neq 0$ ainsi d'après la question précédente et **I.C.1**, on a $u_n \sim \dfrac{v_n\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \sim \dfrac{l\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}$

On conclut que $\boxed{u_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}}$

II Autour du pile ou face

II.A - Étude de $\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)$

II.A.1) Toutes ces variables aléatoires considérées admettent des moments d'ordre 2 car elles prennent un nombre fini de valeurs.

Il est clair que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1) = 0$ et par linéarité $\mathbb{E}(\mathrm{S}) = n \times 0$

De plus $\mathbb{V}(\mathrm{X}_1) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_1^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_1)^2 = \mathbb{E}(1_\Omega) - 0 = 1$ (espérance d'une variable aléatoire constante)

et comme les X_k sont indépendantes deux à deux car mutuellement indépendantes, on a $\mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathbb{V}(\mathrm{X}_n)$

donc $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = n}$

Remarque : Dans la suite pour $k \in \mathbb{R}$, je noterai $\mathbb{E}(k) = \mathbb{E}(k \cdot 1_\Omega) = k$ pour une variable aléatoire constante.

II.A.2) Les variables aléatoires $\cos(\mathrm{S}), \cos(\mathrm{T}), \sin(\mathrm{S})$ et $\sin(\mathrm{T})$ étant bornées, elles admettent donc une espérance.

On a $\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T})) = \mathbb{E}(\cos(\mathrm{S})\cos(\mathrm{T}) - \sin(\mathrm{S})\sin(\mathrm{T})) = \mathbb{E}(\cos(\mathrm{S})\cos(\mathrm{T})) - \mathbb{E}(\sin(\mathrm{S})\sin(\mathrm{T}))$

Par lemme des coalitions $\cos(\mathrm{S})$ et $\cos(\mathrm{T})$ sont indépendantes et il en est de même pour $\sin(\mathrm{S})$ et $\sin(\mathrm{T})$,

ainsi $\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T})) = \mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}))\mathbb{E}(\cos(\mathrm{T})) - \mathbb{E}(\sin(\mathrm{S}))\mathbb{E}(\sin(\mathrm{T}))$

Remarquons que si $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y}$ alors X et Y prennent presque sûrement les mêmes valeurs dans un ensemble dénombrable A. De plus, si $f(\mathrm{X})$ admet une espérance alors par formule de transfert,

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X})) = \sum_{a\in\mathrm{A}} \mathbb{P}(\mathrm{X} = a)f(a) = \sum_{a\in\mathrm{A}} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = a)f(a) = \mathbb{E}(f(\mathrm{Y}))$$

puis on applique à $\mathrm{T} \sim -\mathrm{T}$ et la fonction sinus :

$$\mathbb{E}(\sin(\mathrm{T})) = \mathbb{E}(-\sin(\mathrm{T})) = -\mathbb{E}(\sin(\mathrm{T}))$$

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T})) = \mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}))\mathbb{E}(\cos(\mathrm{T}))}$

Autre méthode :

Avec $\mathrm{T} \sim -\mathrm{T}$ *on montre que* $\sin(\mathrm{T}) \sim \sin(-\mathrm{T}) = -\sin(\mathrm{T})$ *pour conclure que :* $\mathbb{E}(\sin(\mathrm{T})) = \mathbb{E}(-\sin(\mathrm{T})) = \cdots$.

Démontrons cette propriété dans un cadre plus général :

Soit $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y}$ deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ alors $f(\mathrm{X}) \sim f(\mathrm{Y})$.

Je note $\Lambda = \mathrm{X}(\Omega) \cup \mathrm{Y}(\omega)$ qui est dénombrable par réunion finie d'ensembles dénombrables.

Soit $z \in \Lambda$. Il suffit d'établir que $\mathbb{P}(f(\mathrm{X}) = z) = \mathbb{P}(f(\mathrm{Y}) = z)$.

Avec la convention qu'une réunion indexée par l'ensemble vide est vide, on a :

$$(f(\mathrm{X})=z)=\left(\bigcup_{\substack{f(x)=z\\ x\in\Lambda}}(\mathrm{X}=x)\right)\cup\left(\bigcup_{\substack{f(x)=z\\ x\in\mathrm{E}\setminus\Lambda}}(\mathrm{X}=x)\right)=\bigcup_{\substack{f(t)=z\\ t\in\Lambda}}(\mathrm{X}=t)\ \text{(réunion disjointe finie ou dénombrable)}$$

En faisant le même travail sur Y et en utilisant qu'icelle suit la même loi que X, on obtient :

$$\mathbb{P}(f(\mathrm{X})=z)=\sum_{\substack{f(t)=z\\ t\in\Lambda}}\mathbb{P}(\mathrm{X}=t)=\sum_{\substack{f(t)=z\\ t\in\Lambda}}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=t)=\mathbb{P}(f(\mathrm{Y})=z)$$

Remarques : *Cela se généralise sans peine pour deux variables de même loi sur deux espaces probabilisés différents. Par ailleurs, en temps limité, il est sans doute préférable d'admettre ce résultat sauf si ...*

II.A.3) Soit $t\in\mathbb{R}$. On effectue une récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$, pour montrer que $\varphi_n(t)=(\cos t)^n$
Initialisation : On a : $\varphi_1(t)=\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}_1t))=\mathbb{E}(\cos(\mathrm{X}_1t))=\mathbb{E}(\cos(t))=\cos(t)^1$
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\varphi_n(t)=(\cos t)^n$. On a $\varphi_{n+1}(t)=\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}_nt+\mathrm{X}_{n+1}t))$.
On peut appliquer la question précédente car S_nt et $\mathrm{X}_{n+1}t$ sont des variables aléatoires finies indépendantes par lemme des koalas appliqué aux X_i qui sont indépendants de plus $\mathrm{X}_{n+1}t\sim-\mathrm{X}_{n+1}t$.
Ainsi selon **II.A.2**,t en utilisant $\mathrm{X}_{n+1}\sim\mathrm{X}_1$ et l'initialisation, on a :

$$\varphi_{n+1}(t)=\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}_nt+\mathrm{X}_{n+1}t))=\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}_nt))\mathbb{E}(\cos(\mathrm{X}_{n+1}t))=\varphi_n(t)\mathbb{E}(\cos(\mathrm{X}_1t))=(\cos t)^{n+1}$$

Conclusion : On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout entier } n\in\mathbb{N}^* \text{ et tout réel } t,\text{ on a } \varphi_n(t)=(\cos t)^n}$

II.A.4) À l'aide de la question **I.A.5**, on a $\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)=\mathbb{E}\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-\cos(\mathrm{S}_nt)}{t^2}\mathrm{d}t\right)$

Par le lemme du transfert : $\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)=\displaystyle\sum_{s\in\mathrm{S}_n(\Omega)}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t\right)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n=s)$

donc $\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\displaystyle\sum_{s\in\mathrm{S}_n(\Omega)}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n=s)-\sum_{s\in\mathrm{S}_n(\Omega)}\cos(st)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n=s)}{t^2}\mathrm{d}t$ (somme finie)

donc $\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}_nt))}{t^2}\mathrm{d}t$ par le lemme du transfert à nouveau

donc $\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)=\mathbb{E}\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-\varphi_n(t)}{t^2}\mathrm{d}t\right)=\mathbb{E}\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-\cos(t)^n}{t^2}\mathrm{d}t\right)$ d'après **II.A.3**

donc $\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)=\mathbb{E}\left(\dfrac{2}{\pi}u_n\right)$ ainsi $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)=\dfrac{2}{\pi}u_n}$

II.A.5) Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente, il suffit de montrer que $\mathbb{E}(|\mathrm{S}_{2n+1}|)=\mathbb{E}(|\mathrm{S}_{2n+2}|)$.

Méthode 1 : Comme les X_k prennent leurs valeurs dans $\{1,-1\}$, S_{2n+2} ne prend que des valeurs entières et paires entre $-2n-2$ et $2n+2$ et

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_{2n+2}|)=\sum_{k=1}^{n+1}2k(\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n+2}=2k)+\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n+2}=-2k))$$

En conditionnant selon la valeur prise par X_{2n+2}, on obtient pour $k \in [\![1, n+1]\!]$

$$(S_{2n+2} = 2k) = (S_{2n+1} = 2k-1, X_{2n+2} = 1) \cup (S_{2n+1} = 2k+1, X_{2n+2} = -1)$$

La réunion est disjointe et S_{2n+1} et X_{2n+2} sont indépendantes par lemme des coalitions. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{2n+2} = 2k) &= \mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k-1)\mathbb{P}(X_{2n+2} = 1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k+1)\mathbb{P}(X_{2n+2} = -1)\\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k-1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k+1))\end{aligned}$$

et de même

$$\mathbb{P}(S_{2n+2} = -2k) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(S_{2n+1} = -2k-1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = -2k+1))$$

donc $\mathbb{E}(|S_{2n+2}|) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k\,(\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k-1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k+1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = -2k-1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = -2k+1))$

Comme S_{n+1} est à valeurs impaires dans $[\![-2n-1, 2n+1]\!]$, on a :

$$\mathbb{E}(|S_{2n+2}|) = \sum_{k=0}^{n} k\,(\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k+1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = -2k-1)) + \sum_{k=1}^{n+1} k\,(\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k-1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = -2k+1))$$

et par changement d'indices, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\,(\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k-1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = -2k+1)) = \sum_{p=0}^{n} (p+1)\,(\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2p+1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = -2p-1))$$

donc $\mathbb{E}(|S_{2n+2}|) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)\,(\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k+1) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = -2k-1))$

S_{2n+1} étant à valeurs impaires dans $[\![-2n-1, 2n+1]\!]$, cela vaut $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)$.

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = u_{2n+2}}$$

Méthode 2 : Comme les X_k prennent leurs valeurs dans $\{1, -1\}$, alors $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} X_k$ ne prend que des valeurs entières et impaires et S_{2n+2} ne prend que des valeurs entières et paires

Comme $S_{2n+2} = S_{2n+1} + X_{2n+2}$

ainsi on a $(S_{2n+1} \geqslant 0) = (S_{2n+1} \geqslant 1) \subset (S_{2n+2} \geqslant 0)$ et de même $(S_{2n+1} \leqslant 0) \subset (S_{2n+2} \leqslant 0)$

donc $\big||S_{2n+2}| - |S_{2n+1}|\big| = \big|S_{2n+2} - S_{2n+1}\big|$ donc $|S_{2n+2}| - |S_{2n+1}|$ prend ses valeurs dans $\{1, -1\}$ et

$$(|S_{2n+2}| - |S_{2n+1}| = 1) = (S_{2n+1} > 0, X_{2n+2} = 1) \cup (S_{2n+1} < 0, X_{2n+2} = -1)$$

Le lemme des coalitions s'applique par indépendance des X_k, on donc

$$P(S_{2n+1} > 0, X_{2n+2} = 1) = P(S_{2n+1} > 0)P(X_{2n+2} = 1)$$

On va montrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $S_p \sim -S_p$

L'initialisation est évidente pour $p = 1$, on a bien $S_1 = X_1 \sim -X_1 = -S_1$.

Pour l'hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_p \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{p} X_k \sim \sum_{k=1}^{p}(-X_k) \sim -S_p$.

On utilise le lemme des coalitions, pour obtenir que S_p et X_{p+1} sont indépendantes et il en est de même pour $-S_p$ et $-X_{p+1}$.
Ainsi la loi du couple (S_p, X_{p+1}) est déterminée par les lois de S_p et X_{p+1} et il en est de même pour le couple $(-S_p, -X_{p+1})$.
donc
Or $S_p \sim -S_p$ et $X_p \sim -X_p$ donc
$$(S_p, X_{p+1}) \sim (-S_p, -X_{p+1})$$
en utilisant la propriété pour l'autre méthode de II.A.2, on obtient avec l'application $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto a + b$

$$S_{p+1} = S_p + X_{p+1} \sim (-S_p - X_{p+1}) = -S_{p+1}$$

On peut donc conclure que notre propriété est établie par récurrence.
En particulier pour $p = 2n+1$, on a $S_{2n+1} \sim -S_{2n+1}$
donc $P(S_{2n+1} > 0) = P(S_{2n+1} < 0)$ or $P(S_{2n+1} > 0) + P(S_{2n+1} < 0) = 1$ car S_{2n+1} ne s'annule pas
donc
$$P(S_{2n+1} > 0, X_{2n+2} = 1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$
d'où
$$P(S_{2n+1} > 0, X_{2n+2} = 1) = \frac{1}{4} \text{ et de même } P(S_{2n+1} < 0, X_{2n+2} = -1) = \frac{1}{4}$$
donc $P(|S_{2n+2}| - |S_{2n+1}| = 1) = \frac{1}{2}$ et de même $P(|S_{2n+2}| - |S_{2n+1}| = -1) = \frac{1}{2}$
donc $E(|S_{2n+2}| - |S_{2n+1}|)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ d'où $E(|S_{2n+2}|) = E(|S_{2n+1}|))$
On déduit de la question précédente que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = u_{2n+2}}$

II.B - Étude de $\dfrac{S_n}{n}$

II.B.1) On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{E}(S_n^4) = 3n^2 - 2n$
Initialisation : On a $\mathbb{E}(S_1^4) = \mathbb{E}(X_1^4) = \mathbb{E}(1) = 1$ et $3 \times 1^2 - 2 \times 1 = 1$
La propriété est vraie au rang 1
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{E}(S_n^4) = 3n^2 - 2n$. Montrons $\mathbb{E}(S_{n+1}^4) = 3(n+1)^2 - 2(n+1)$
On a $3(n+1)^2 - 2(n+1) = 3n^2 + 4n + 1$ et

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^4) = \mathbb{E}\left((S_n + X_{n+1})^4\right) = \mathbb{E}\left(S_n^4 + 4S_n^3X_{n+1} + 6S_n^2X_{n+1}^2 + 4S_nX_{n+1}^3 + X_{n+1}^4\right)$$

comme $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_{n+1}^3) = 0$ et $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(X_{n+1}^4) = \mathbb{E}(1) = 1$ et par indépendance de S_n et X_{n+1}, on a

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^4) = \mathbb{E}(S_n^4) + 4\mathbb{E}(S_n^3)\mathbb{E}(X_{n+1}) + 6\mathbb{E}(S_n^2)\mathbb{E}(X_{n+1}^2) + 4\mathbb{E}(S_n)\mathbb{E}(X_{n+1}^3) + \mathbb{E}(X_{n+1}^4) = \mathbb{E}(S_n^4) + 6\mathbb{E}(S_n^2) + 1$$

or $\mathbb{E}(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ et $\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{V}(S_n) + \mathbb{E}(S_n)^2 = n + 0$ donc

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^4) = 3n^2 - 2n + 6n + 1 = 3n^2 + 4n + 1$$

Conclusion : On a montré que $\boxed{\mathbb{E}(S_n^4) = 3n^2 - 2n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$
II.B.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $U_n = \left(\dfrac{S_n}{n}\right)^4$ est une variable aléatoires finies à valeurs positives et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$,
on peut donc appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\left(U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sqrt{n}\mathbb{E}(U_n)$$

or $\mathbb{E}(\mathrm{U}_n) = \dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4)}{n^4} = \dfrac{3n^2-2n}{n^4} \leqslant \dfrac{3}{n^2}$ donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\mathrm{U}_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{3}{n^{3/2}}}$

II.B.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathcal{Z}_n = \bigcup\limits_{k \geqslant n} \left(\mathrm{U}_k \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(\mathrm{U}_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \in \mathcal{A}$ car U_k est une variable aléatoire
donc $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable
De plus on a

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{U}_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leqslant \frac{3}{k^{3/2}}$$

Ainsi par réunion dénombrable

$$0 \leqslant \mathbb{P}(\mathcal{Z}_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\mathrm{U}_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}} \leqslant \infty$$

la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{3}{k^{3/2}}$ converge car $3/2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{3}{k^{3/2}} = 0$

Ainsi $\boxed{\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(\mathcal{Z}_n) = 0}$ par théorème d'encadrement

II.B.4) On a : $\mathcal{Z} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathcal{Z}_k\right)$

La famille $\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathcal{Z}_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante d'événements

de plus $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathcal{Z}_k\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathcal{Z}_k\right) \leqslant \mathbb{P}(\mathcal{Z}_n)$ donc par continuité décroissante $\mathbb{P}(\mathcal{Z}) = 0$

Soit $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$ ce qui nous fournit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega \notin \mathcal{Z}_\mathrm{N}$

Soit $n \geqslant \mathrm{N}$, on a $\mathrm{U}_n(\omega) < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On a donc $\dfrac{\mathrm{S}_n^4(\omega)}{n^4} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\left|\dfrac{\mathrm{S}_n(\omega)}{n}\right| < \dfrac{1}{n^{1/8}}$

donc par théorème d'encadrement on a montré $\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$, $\frac{\mathrm{S}_n(\omega)}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

or $\mathbb{P}(\mathcal{Z}) = 0$ donc $\boxed{\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge presque sûrement vers } 0}$

III D'autres sommes aléatoires

III.A - Étude de $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|)$

III.A.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On remarque que pour a et $b \in \mathbb{R}$, on a $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ avec égalité si et seulement si $ab \geqslant 0$
donc $|a+b| - |a| \leqslant |b|$ avec égalité si et seulement si $ab \geqslant 0$

Ainsi $(\mathrm{T}_n \mathrm{X}_{n+1} \geqslant 0) = (|\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n| = a_{n+1})$ car $|a_{n+1}\mathrm{X}_{n+1}|$ est une variable élétoire constante égale à a_{n+1}
on a aussi $||a+b| - |a|| \leqslant |b|$ ainsi $|a+b| - |a| \geqslant -|b|$

$$\text{Ainsi } (|\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n| \geqslant -a_{n+1}) = \Omega$$

On a $\Omega = (\mathrm{T}_n \mathrm{X}_{n+1} \geqslant 0) \cup (\mathrm{T}_n \mathrm{X}_{n+1} < 0)$ (union disjointe)
De plus, $\mathrm{T}_n \sim -\mathrm{T}_n$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n > 0) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_n < 0)$ (analogue à **II**) et donc $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n > 0) \leqslant \frac{1}{2}$
On a $(\mathrm{T}_n \mathrm{X}_{n+1} > 0) = (\mathrm{T}_n < 0, \mathrm{X}_{n+1} = -1) \cup (\mathrm{T}_n > 0, \mathrm{X}_{n+1} = 1)$

donc $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_n < 0, \mathrm{X}_{n+1} = -1) + \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > 0, \mathrm{X}_{n+1} = 1)$ (incompatibilité)
donc $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_n < 0)\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} = -1) + \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > 0)\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1)$ (indépendance)
donc $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > 0)$ et de même $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > 0)$
Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} \geqslant 0) \geqslant \mathbb{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0)$

On considère la variable aléatoire W : $\left\{\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} a_{n+1} & \text{si } (\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) \geqslant 0 \\ -a_{n+1} & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$

de sorte que $\mathrm{W} \leqslant |\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n|$ car

- si $\mathrm{T}_n(\omega)\mathrm{X}_{n+1}(\omega) \geqslant 0$, alors $\mathrm{W}(\omega) = a_{n+1} = |\mathrm{T}_{n+1}(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)|$
- si $\mathrm{T}_n(\omega)\mathrm{X}_{n+1}(\omega) < 0$, alors $\mathrm{W}(\omega) = -a_{n+1} \leqslant |\mathrm{T}_{n+1}(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)|$

comme $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} \geqslant 0) \geqslant \mathbb{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0)$, on a $\mathbb{E}(\mathrm{W}) \geqslant 0$ or $\mathbb{E}(\mathrm{W}) \leqslant \mathbb{E}(|\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n|)$
donc $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n|) \geqslant 0$
ainsi $\boxed{\text{la suite } (\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

III.A.2) On suppose que la série $\sum a_n^2$ est convergente

On a $\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(a_k\mathrm{X}_k)$ par indépendance

donc $\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2\mathbb{V}(\mathrm{X}_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = \mathrm{M}$ où on a noté $\mathrm{M} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$

On a donc $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n^2) = \mathbb{V}(\mathrm{T}_n) + \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)^2 = \mathbb{V}(\mathrm{T}_n) \leqslant \mathrm{M}$. Je note $\tilde{1}$ la variable aléatoire constante égale à 1.
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = \mathbb{E}(\tilde{1} \cdot |\mathrm{T}_n|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(\tilde{1}^2)\mathbb{E}(\mathrm{T}_n^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(\mathrm{T}_n^2)} \leqslant \sqrt{\mathrm{M}}$$

donc la suite $(\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée (par $\sqrt{\mathrm{M}}$) et croissante d'après la question précédente
donc $\boxed{\text{si la série } \sum a_n^2 \text{ est convergente, alors la suite } (\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$

III.A.3) On a $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_1|) = a_1$ car $|\mathrm{T}_1| = a_1|\mathrm{X}_1|$
<u>Premier cas :</u> Si $a_1 = 0$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = 0$ car $a_1 \geqslant a_2 + \cdots + a_n$ et les $a_k \geqslant 0$
donc $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = 0 = \mathbb{E}(|\mathrm{T}_1|) = a_1$
<u>Deuxième cas :</u> Si $a_1 > 0$,

Si $\mathrm{X}_1(\omega) = 1$ alors $\mathrm{T}_n(\omega) = a_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\mathrm{X}_k(\omega) \geqslant 0$ donc $|\mathrm{T}_n(\omega)| = a_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\mathrm{X}_k(\omega)$

si $\mathrm{X}_1(\omega) = -1$ alors $\mathrm{T}_n(\omega) = -a_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\mathrm{X}_k(\omega) \leqslant 0$ donc $|\mathrm{T}_n(\omega)| = a_1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\mathrm{X}_k(\omega)$

dans les deux cas $|\mathrm{T}_n(\omega)| - |\mathrm{T}_1(\omega)| = \mathrm{X}_1(\omega)\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\mathrm{X}_k(\omega)\right)$

donc $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n| - |\mathrm{T}_1|) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_1 \cdot \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\mathrm{X}_k\right) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_1) \cdot \mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\mathrm{X}_k\right)$ par lemme des coalitions

donc $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) - \mathbb{E}(|\mathrm{T}_1|) = 0$ ainsi $\boxed{\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = \mathbb{E}(|\mathrm{T}_1|) = a_1}$

III.B - Application à une suite d'intégrales

III.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

La fonction $\psi_n : t \mapsto \dfrac{1 - \cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$

Et $\forall t \in [1, +\infty[$, $|\psi_n(t)| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ qui donne l'intégrabilité de ψ sur $[1, +\infty[$

Quand $t \to 0$, on a $1-\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right) = 1-\left(1+\mathcal{O}(t^2)\right)\left(1+\mathcal{O}(t^2)\right)\cdots\left(1+\mathcal{O}(t^2)\right)$
donc $1-\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right) = 1-1+\mathcal{O}(t^2) = \mathcal{O}(t^2)$ (produit fini)
donc $\psi_n(t) \underset{t\to 0}{=} \mathcal{O}(1)$ donc ψ_n est bornée au voisinage de 0 donc intégrable sur un intervalle $]0,1]$
ceci assure l'existence $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\infty}\psi_n$
Ainsi $\boxed{(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite bien définie}}$
On choisit $a_k = \dfrac{1}{2k-1}$ pour $k \geqslant 1$ ainsi on a la convergence de la série $\displaystyle\sum_k a_k^2$
d'où d'après **II.A.2**, la convergence de la suite $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on sait croissante d'après **II.A.1**.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la question **I.A.5**, on a $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = \mathbb{E}\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{1-\cos(\mathrm{T}_n t)}{t^2}\mathrm{d}t\right)$
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a comme en **II.A.3** et **II.A.2**,

$$\mathbb{E}\cos(\mathrm{T}_n t) = \mathbb{E}\left(\cos\left(ta_1\mathrm{X}_1\right)\right)\mathbb{E}\left(\cos\left(ta_2\mathrm{X}_2\right)\right)\cdots\mathbb{E}\left(\cos\left(ta_n\mathrm{X}_n\right)\right)$$

donc comme en **II.A.3** :

$$\mathbb{E}\left(\cos(\mathrm{T}_n t)\right) = \cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)$$

Avec la méthode de la question **II.A.4.** : $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{1-\mathbb{E}\left(\cos(\mathrm{T}_n t)\right)}{t^2}\mathrm{d}t$ (deux fois ; lemme du transfert)
On a $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{1-\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}\mathrm{d}t$ donc $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n$
donc $\mathrm{J}_n = \dfrac{\pi}{2}\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|)$ ainsi $\boxed{(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite croissante et convergente}}$
III.B.2) On renouvelle les mêmes choix et notations qu'à la question précédente :
On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{7} a_k \simeq 0{,}9551337551337553$ à la calculatrice donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{7} a_k \leqslant a_1 = 1$
donc $1 = a_1 = \mathbb{E}(|\mathrm{T}_1|) = \mathbb{E}(|\mathrm{T}_7|)$ d'après **III.A.3**
Par croissance de la suite $(\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|))_n$ on a $\forall n \in [\![1,7]\!]$, $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) = 1$
donc comme $\mathrm{J}_n = \dfrac{\pi}{2}\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|)$, on a $\boxed{\mathrm{J}_n = \dfrac{\pi}{2} \text{ pour } 1 \leqslant n \leqslant 7}$
Pour pouvoir conclure, il reste à établir la stricte croissance de $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|)_{n\geqslant 7}$.
Pour cela on considère $n \geqslant 7$, on veut montrer $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_n|) < \mathbb{E}(|\mathrm{T}_{n+1}|)$

étape 1 : un résultat combinatoire : On va montrer que pour $p \geqslant 7$,

$$\text{il existe } \mathrm{K} \subset [\![1,p]\!] \text{ tel que } \sum_{k\in\mathrm{K}} a_k < \sum_{k\in\overline{\mathrm{K}}} a_k \text{ et } a_{p+1} + \sum_{k\in\mathrm{K}} a_k > \sum_{k\in\overline{\mathrm{K}}} a_k \text{ où } \overline{\mathrm{K}} = [\![1,p]\!] \setminus \mathrm{K}$$

Je note pour $p \geqslant 7$ et $\mathrm{K} \subset [\![1,p]\!]$, : $\mathcal{S}_p(\mathrm{K}) = \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\in\mathrm{K}}}^{n} a_k - \sum_{\substack{k=1\\k\notin\mathrm{K}}}^{n} a_k$

On remarque que $\mathcal{S}_p(\overline{\mathrm{K}}) = -\mathcal{S}_p(\mathrm{K})$
Il s'agit alors de montrer la propriété $\mathcal{E}_p$: « il existe $\mathrm{K} \subset [\![1,p]\!]$, tel que $0 < |\mathcal{S}_p(\mathrm{K})| < a_{p+1}$ » pour $p \geqslant 7$
Premièrement : Soit $p \geqslant 7$ et $\mathrm{K} \subset [\![1,p]\!]$, on montre que $\mathcal{S}_p(\mathrm{K}) \neq 0$.
Par l'absurde si il existe $\mathrm{K} \subset [\![1,p]\!]$, tel que $\mathcal{S}_p(\mathrm{K}) = 0$
alors je considère $l = \max\left\{j \in \mathbb{N} \,/\, 3^j \leqslant a_p\right\}$ et $b = 3^l$ et on a

$$\frac{1}{3^l} = \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k\in \mathrm{K}, a_k\neq b}}^{n} a_k - \sum_{\substack{k=1 \\ k\notin \mathrm{K}, a_k\neq b}}^{n} a_k \right|$$

En mettant au même dénominateur le terme de droite et en simplifiant sous forme irréductible, on obtient $\dfrac{1}{3^l} = \dfrac{\mathrm{N}}{3^{l'}\mathrm{D}}$ où $\mathrm{N}, \mathrm{D} \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{D} \wedge 3 = 1$ et $l' \in [\![0, l-1]\!]$ (Absurde)
Ensuite : la $\mathcal{E}_p$ ne me semble pas héréditaire (*je n'ai pas trouvé*)
En revanche pour $p \geqslant 7$ je considère la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_p : \text{il existe } \mathrm{K} \subset [\![1, p]\!] \text{ tel que } |\mathcal{S}_p(\mathrm{K})| \leqslant \frac{a_{p+1}}{2}$$

Avec ce qu'on vient de faire, on a $\mathcal{P}_p \Longrightarrow \mathcal{E}_p$
et cette propriété est héréditaire de la façon suivante : $\mathcal{P}_p \Longrightarrow \mathcal{P}_{p+2}$ pour $p \geqslant 7$
En effet, si il existe $\mathrm{K} \subset [\![1, p]\!]$ tel que $|\mathcal{S}_p(\mathrm{K})| \leqslant \dfrac{a_{p+1}}{2}$
Je peux supposer $0 < \mathcal{S}_p(\mathrm{K}) \leqslant \dfrac{a_{p+1}}{2}$ quitte à remplacer K par son complémentaire.
Je considère alors $\mathrm{K}' = \mathrm{K} \cup \{p+2\}$
On a alors $a_{p+2} - a_{p+1} \leqslant \mathcal{S}_{p+2}(\mathrm{K}') \leqslant a_{p+2} - \dfrac{a_{p+1}}{2}$
Par décroissance de $(a_k)_k$, il suffit alors d'établir que $a_{p+1} - a_{p+2} < \dfrac{a_{p+3}}{2}$ et $a_{p+2} < \dfrac{a_{p+3}}{2} + \dfrac{a_{p+1}}{2}$
La deuxième inégalité provient de la stricte concavité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ car $a_k = 1/(2k-1)$
Pour la première $a_{p+1} - a_{p+2} = \dfrac{2}{4p^2 + 8p + 3}$ et $\dfrac{a_{p+3}}{2} = \dfrac{1}{4p+10}$;
on calcule alors $4p^2 + 8p + 3 - 2(4p+10) = 4p^2 - 7 > 0$ pour $p \geqslant 7$
On vient de prouver $|\mathcal{S}_{p+2}(\mathrm{K}')| \leqslant \dfrac{a_{p+3}}{2}$
Il s'agit maintenant de chercher $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ vérifiant $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$ et $\mathcal{P}_{\mathrm{N}+1}$ et de vérifier que : $\forall p \in [\![7, \mathrm{N}-1]\!],\ \mathcal{E}_p$
Pour cela, on exécute le script en Python qui suit. L'idée est de tout mettre au dénominateur en utilisant l'arithmétique « exacte »des entiers en python (version 3.4).

```
def inv_a(k):
    return 2*k-1

def essai(n):
    grand=1 # on y met le produit des a_k
    for k in range(1,n+2):
        grand*=2*k-1
    Ak=[grand//inv_a(k) for k in range(1,n+2)]
    res=[False,False]
    ens_K= 2**n-1# ensemble k est encod\'e par un entier
#l\'ecriture en base 2 donne la fonction caractéristique
    while (not res[0]) and ens_K>0:
# inutile de tester l ensemble vide
        somme=0
        reste=ens_K
        for i in range(1,n+1):
            if reste%2==1:
                somme +=Ak[i-1]
            else:
                somme -=Ak[i-1]
            reste=reste//2
```

```
        if abs(somme) <Ak[-1]:
            res[1]=True
#res[1] est le test de la propri\'et\'e voulue par le sujet
        if 2*abs(somme) <Ak[-1] and 0<2*abs(somme) :
            res[0]=True
#res[0] est le test de la propri\'et\'e h\'er\'editaire
        ens_K-=1
    return res

#on cherche \'a partir de 7, l\'a o\'u la propriete hereditaire P_k est vraie
# sur deux entiers cons\'ecutifs
n=7
es_n=essai(n)
es_s=essai(n+1)
test_n=es_n[0]
test_s=es_s[0]
while not(test_n and test_s):
    print(es_n)
    n+=1
    es_n=es_s
    es_s=essai(n+1)
    test_n=es_n[0]
    test_s=es_s[0]
print(es_n)
print(es_s)
```

Le résultat confirme la propriété attendue :

```
[False, True] # [P_7,E_7]
[True, True] # [P_8,E_8]
[False, True] # [P_9,E_9]
[True, True] # [P_10,E_10]
[True, True] # [P_11,E_11]
```

Difficile d'effectuer tout cela en temps limité ...

étape 2 : $\mathbb{P}(0 < |\mathrm{T}_n| < a_{n+1}) \neq 0$: L'étape 1 nous fournit $\mathrm{K} \subset [\![1, n]\!]$ tel que

$$\sum_{k\in\mathrm{K}} a_k < \sum_{k\in\overline{\mathrm{K}}} a_k \text{ et } a_{p+1} + \sum_{k\in\mathrm{K}} a_k > \sum_{k\in\overline{\mathrm{K}}} a_k$$

On a $\left((\mathrm{X}_{n+1} = 1) \cap \bigcap_{k\in\mathrm{K}} (\mathrm{X}_k = 1) \cap \bigcap_{k\in\overline{\mathrm{K}}} (\mathrm{X}_k = -1)\right) \subset (\mathrm{T}_n < 0, \mathrm{T}_{n+1} > 0)$ or par indépendance :

$$\mathbb{P}\left((\mathrm{X}_{n+1} = 1) \cap \bigcap_{k\in\mathrm{K}} (\mathrm{X}_k = 1) \cap \bigcap_{k\in\overline{\mathrm{K}}} (\mathrm{X}_k = -1)\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

donc $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n < 0, \mathrm{T}_{n+1} > 0) \neq 0$ or $(\mathrm{T}_n < 0, \mathrm{T}_{n+1} > 0) \subset (0 < |\mathrm{T}_n| < a_{n+1})$ On a bien

$$\mathbb{P}(0 < |\mathrm{T}_n| < a_{n+1}) \neq 0$$

étape 3 : $\mathbb{E}(|\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n|) > 0$:

Comme T_n prend un nombre fini de valeurs et que $\mathbb{P}(0 < |\mathrm{T}_n| < a_{n+1}) > 0$,
on peut donc considérer $\Lambda = \max\{|\mathrm{T}_n(\omega)| \,/\, |\mathrm{T}_n(\omega)| < a_{n+1}\}$
Ainsi

$$(|\mathrm{T}_n| \leqslant \Lambda) = (|\mathrm{T}_n| < a_{n+1}) \text{ et } 0 < \Lambda < a_{n+1}$$

On considère la variable aléatoire

$$\mathrm{W} \;:\; \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto \begin{cases} a_{n+1} & \text{si } (\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) \geqslant 0 \\ -a_{n+1} & \text{si } |\mathrm{T}_n(\omega)| \geqslant a_{n+1} \text{ et } (\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) < 0 \\ a_{n+1} - 2\Lambda & \text{si } |\mathrm{T}_n(\omega)| < a_{n+1} \text{ et } (\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Par construction on a $\mathrm{W} \leqslant |\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n|$; en effet

- si $|\mathrm{T}_n(\omega)| < a_{n+1}$ et $(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) < 0$, alors $|\mathrm{T}_{n+1}(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| = a_{n+1} - |\mathrm{T}_n(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| \geqslant \mathrm{W}(\omega)$
- si $|\mathrm{T}_n(\omega)| \geqslant a_{n+1}$ et $(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) < 0$, alors $|\mathrm{T}_{n+1}(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| = -a_{n+1} + |\mathrm{T}_n(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| = \mathrm{W}(\omega)$
- si $(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) \geqslant 0$, alors $|\mathrm{T}_{n+1}(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| = a_{n+1} + |\mathrm{T}_n(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| = \mathrm{W}(\omega)$

Il suffit alors d'établir que $\mathbb{E}(\mathrm{W}) > 0$.
Je note $\mathrm{A} = (|\mathrm{T}_n| \geqslant a_{n+1}, \mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0)$, $\mathrm{B} = (|\mathrm{T}_n| \geqslant a_{n+1}, \mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0)$, $\mathrm{C} = (|\mathrm{T}_n| < a_{n+1}, \mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0)$, $\mathrm{D} = (|\mathrm{T}_n| < a_{n+1}, \mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0)$ et $\mathrm{F} = (\mathrm{T}_n = 0)$
$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{F}, \mathrm{D})$ est un système complet d'événements et on remarque que

$$\mathrm{W} = a_{n+1}1_{\mathrm{A}} - a_{n+1}1_{\mathrm{B}} + a_{n+1}1_{\mathrm{C}} + (a_{n+1} - 2\Lambda)1_{\mathrm{D}} + a_{n+1}1_{\mathrm{F}}$$

donc

$$\mathbb{E}(\mathrm{W}) = a_{n+1}\mathbb{P}(\mathrm{A}) - a_{n+1}\mathbb{P}(\mathrm{B}) + a_{n+1}\mathbb{P}(\mathrm{C}) + (a_{n+1} - 2\Lambda)\mathbb{P}(\mathrm{D}) + a_{n+1}\mathbb{P}(\mathrm{F})$$

Comme $\mathrm{T}_n \sim -\mathrm{T}_n$ et $\mathrm{X}_{n+1} \sim -\mathrm{X}_{n+1}$ et vue l'indépendance de T_n et X_{n+1}, on montre comme plus haut que

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(|\mathrm{T}_n| \geqslant a_{n+1}) \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{C}) = \mathbb{P}(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(0 < |\mathrm{T}_n| < a_{n+1})$$

donc

$$\mathbb{E}(\mathrm{W}) \geqslant 2(a_{n+1} - \Lambda)\mathbb{P}(\mathrm{C})$$

donc $\mathbb{E}(\mathrm{W}) > 0$ ce qui permet de conclure

• • • FIN • • •
