ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 20/03/2025

Devoir en temps libre n°16

Problème I

Soit n entier non nul. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, on pose $\mathrm{M}_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'application définie par

$$\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

avec $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On se propose de construire un *plongement* de S_n dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une application $\varphi : \mathrm{S}_n \mapsto \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ injective et vérifiant

$$\forall (\sigma, \gamma) \in \mathrm{S}_n^2 \qquad \varphi(\sigma \circ \gamma) = \varphi(\sigma)\varphi(\gamma)$$

1. Soit $\sigma \in \mathrm{S}_n$. Que représente M_σ pour l'endomorphisme f_σ ? Justifier que la matrice M_σ est orthogonale.
2. Soit $(\sigma, \gamma) \in \mathrm{S}_n^2$. Déterminer le produit $\mathrm{M}_\sigma \mathrm{M}_\gamma$.
3. On note $u = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, justifier que $\mathrm{Vect}\,(u)$ est stable par f_σ. Qu'en déduit pour $f_\sigma\left(\mathrm{Vect}\,(u)^\perp\right)$.
4. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall \sigma \in \mathrm{S}_n \qquad \mathrm{P}^\top \mathrm{M}_\sigma \mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{A}_\sigma \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}_\sigma \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$$
5. Conclure en construisant un plongement de S_n dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Problème II

On définit μ la *fonction de Möbius* par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour n entier non nul, on pose

$$\mathrm{M}(n) = \sum_{k \in [\![1 \,;\, n]\!] \;|\; k \wedge n = 1} \omega^k \quad \text{avec} \quad \omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$$

1. En considérant l'union disjointe
$$[\![1 \,;\, n]\!] = \bigsqcup_{d|n} \{k \in [\![1 \,;\, n]\!] \mid k \wedge n = d\}$$
montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^k = \sum_{d|n} \mathrm{M}\left(\frac{n}{d}\right)$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^k = \sum_{d|n} \mathrm{M}(d)$
2. Soit $n \geqslant 2$ et d diviseur de n. En distinguant le cas où d admet un facteur carré et le cas où il est sans facteur carré et s'écrivant comme produit de k facteurs premiers pris parmi les r facteurs premiers de n avec $k \in [\![0 \,;\, r]\!]$, établir
$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$
3. Conclure en montrant $\mathrm{M} = \mu$.

Problème III

Soit p un nombre premier.

1. Justifier que p divise $2^p - 2$. On note a_p le quotient de $2^p - 2$ par p.

2. Soit $k \in [\![1\,;\, p-1]\!]$. Montrer $\qquad p$ divise $\binom{p}{k}$

   puis
$$k!\frac{\binom{p}{k}}{p} \equiv (-1)^{k-1}(k-1)!\ [p]$$

3. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, calculer $\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \bar{k}^{-1}$.