ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°85

Exercice 1 (*)

Résoudre :

1. $5x \equiv 3\ [6]$
2. $3x \equiv 5\ [6]$
3. $x^2 \equiv 1\ [8]$
4. $x^2 \equiv -1\ [7]$

Exercice 2 (*)

Résoudre

1. $\begin{cases} 2x+3y \equiv 4\ [13] \\ 3x+2y \equiv 5\ [13] \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x = 2\ [5] \\ 5x = 1\ [7] \end{cases}$
3. $x^2 - 5y^2 = 3$

Exercice 3 (*)

A-t-on $\overline{18} \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})$? Si oui, préciser son inverse.

Exercice 4 (*)

Résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \bar{6}x + \bar{7}y = \bar{0} \\ \bar{6}x - \bar{7}y = \overline{30} \end{cases}$

Exercice 5 (*)

Soient m et n deux entiers non nuls non premiers entre eux. Les anneaux $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 6 (**)

Pour n entier non nul, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n.

1. Déterminer une expression de $\tau(n)$ pour $n \geqslant 2$.
2. Montrer que si m et n sont deux entiers premiers entre eux, alors $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$.

Exercice 7 (**)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Montrer que n ne divise pas $2^n - 1$.

Exercice 8 (**)

Déterminer les nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n entier non nul.

Exercice 9 (**)

Soit n entier non nul. Déterminer $\sum_{d|n} \varphi(d)$.

Exercice 10 (**)

Soit n un entier impair non multiple de 5. Montrer qu'il existe un multiple positif de n dont l'écriture décimale est constituée de 1.

Exercice 11 (**)

1. Soit $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle $r = \dfrac{p}{q}$ écrite sous forme irréductible. Montrer
$$p | a_0 \quad \text{et} \quad q | a_n$$
2. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X} - 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$?

Exercice 12 (**)

Soit p un nombre premier impair. Dans $\mathbb{F}_p$, déterminer $\sum\limits_{k=1}^{p-1} \bar{k}^{-1}$.

Exercice 13 (**)

Soient p et q deux nombres premiers distincts. On note $n = pq$. Soit d entier premier avec $w = (p-1)(q-1)$.

1. Justifier qu'il existe un entier e tel que $de \equiv 1 \; [w]$.
2. Montrer $$\forall x \in \mathbb{Z} \qquad x^{de} \equiv x \; [n]$$