

## Feuille d'exercices n°86

### Exercice 1 (\*\*)

Soit  $p$  un nombre premier supérieur à 4. Montrer que  $p^2 - 1$  est divisible par 24.

### Exercice 2 (\*\*)

Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $n^{13} \equiv n \pmod{42}$ .

### Exercice 3 (\*\*\*)

Soit  $p$  premier et  $k$  entier. Montrer que

$$\sum_{\bar{x} \in \mathbb{F}_p} \bar{x}^k = \bar{0} \quad \text{ou} \quad -\bar{1}$$

### Exercice 4 (\*\*\*)

Soient  $a$  et  $p$  des entiers non nuls tels que  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . On suppose que pour tout diviseur strict  $d$  de  $p-1$ , l'entier  $a^d - 1$  est premier avec  $p$ . Montrer que  $p$  est premier.

### Exercice 5 (\*\*\*)

Soit  $p$  un nombre premier tel que  $p^2 + 2$  est aussi premier. Montrer que  $p^3 + 2$  l'est aussi.

### Exercice 6 (\*\*)

Existe-il  $n$  entier non nul tel que l'écriture en base 10 de  $n^{2025}$  commence (au sens des puissances de 10 croissantes) par 2025 ?

### Exercice 7 (\*\*\*)

Quel est le chiffre des unités de  $2024^{2024^{2024}}$  ?

### Exercice 8 (\*\*\*)

Soient  $m, n$  des entiers non nuls. Établir

$$(3^n - 1) \wedge (3^m - 1) = 3^{n \wedge m} - 1$$

### Exercice 9 (\*\*\*)

Soit  $p$  nombre premier impair. Déterminer le nombre de carrés dans  $\mathbb{F}_p$ .

### Exercice 10 (\*\*\*)

Soit  $p$  entier avec  $p \geq 2$ . Montrer le théorème de *Wilson* :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \iff p \text{ premier}$$

### Exercice 11 (\*\*\*)

1. Soit  $p > 2$  un nombre premier. Montrer :

$$-1 \text{ carré dans } \mathbb{F}_p \iff p \equiv 1 [4]$$

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme  $1 + 4n$  avec  $n$  entier.

### Exercice 12 (\*\*\*)

Soit  $n$  un entier avec  $n \geq 2$  et  $p$  un nombre premier. Montrer

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

### Exercice 13 (\*\*\*)

Soit  $n$  entier impair,  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  et  $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$ . Calculer  $|Z|^2$ .