

Feuille d'exercices n°86

Exercice 1 (**)

Soit p un nombre premier supérieur à 4. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice 2 (**)

Déterminer les entiers relatifs n tels que $n^{13} \equiv n \pmod{42}$.

Exercice 3 (***)

Soit p premier et k entier. Montrer que

$$\sum_{\bar{x} \in \mathbb{F}_p} \bar{x}^k = \bar{0} \quad \text{ou} \quad -\bar{1}$$

Exercice 4 (***)

Soient a et p des entiers non nuls tels que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. On suppose que pour tout diviseur strict d de $p-1$, l'entier $a^d - 1$ est premier avec p . Montrer que p est premier.

Exercice 5 (***)

Soit p un nombre premier tel que $p^2 + 2$ est aussi premier. Montrer que $p^3 + 2$ l'est aussi.

Exercice 6 (**)

Existe-il n entier non nul tel que l'écriture en base 10 de n^{2025} commence (au sens des puissances de 10 croissantes) par 2025 ?

Exercice 7 (***)

Quel est le chiffre des unités de $2024^{2024^{2024}}$?

Exercice 8 (***)

Soient m, n des entiers non nuls. Établir

$$(3^n - 1) \wedge (3^m - 1) = 3^{n \wedge m} - 1$$

Exercice 9 (***)

Soit p nombre premier impair. Déterminer le nombre de carrés dans \mathbb{F}_p .

Exercice 10 (***)

Soit p entier avec $p \geq 2$. Montrer le théorème de *Wilson* :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \iff p \text{ premier}$$

Exercice 11 (***)

1. Soit $p > 2$ un nombre premier. Montrer :

$$-1 \text{ carré dans } \mathbb{F}_p \iff p \equiv 1 [4]$$

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $1 + 4n$ avec n entier.

Exercice 12 (***)

Soit n un entier avec $n \geq 2$ et p un nombre premier. Montrer

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Exercice 13 (***)

Soit n entier impair, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$. Calculer $|Z|^2$.