ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°87

Exercice 1 (**)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Montrer que n ne divise pas $2^n - 1$.

Indications : Considérer p plus petit facteur premier de n puis étudier l'ordre de $\bar{2}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (**)

Soit p un nombre premier impair et $x \in \mathbb{Z}$. Montrer

$$\bar{x} \in \mathbb{F}_p \text{ est un carré } \iff x^{\frac{p+1}{2}} \equiv x \ [p]$$

On admettra le résultat suivant : pour $\mathrm{P} \in \mathbb{F}_p[\mathrm{X}]$, le polynôme P admet au plus $\deg \mathrm{P}$ racines distinctes.

Indications : Pour le sens indirect, considérer le morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{F}_p^* \to \mathbb{F}_p^*, x \mapsto x^2$ puis déterminer Card Im φ. Comparer enfin les racines de $\mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}} - 1$ aux éléments de Im φ.

Exercice 3 (**)

Résoudre

1. $x^2 + x + \bar{7} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$;
2. $x^2 - \bar{4}x + \bar{3} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Indications : 1. Observer que $\bar{7} = -\bar{6}$ et que $\bar{2} - \bar{3} = -\bar{1}$, $\bar{2} \times -\bar{3} = -\bar{6}$.
2. Procéder à une factorisation sous forme canonique de $x^2 - \bar{4}x$ puis lister les carrés de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 4 (***)

Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que 7 divise $n^n - 3$.

Indications : Utiliser le petit théorème de Fermat pour réduire les cas d'étude de l'exposant puis procéder par exhaustion.

Exercice 5 (***)

Déterminer les entiers $n \geqslant 2$ tel que $\varphi(n)$ divise n.

Indications : Notant $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ avec r entier non nul, les p_i premiers strictement ordonnés et les α_i entiers non nuls, établir une équivalence entre $\varphi(n) | n$ et une autre relation de divisibilité faisant intervenir les p_i sans les α_i. Avec des considérations de parité sur les p_i, étudier le cas où $p_1 > 2$ puis $r = 1$ et enfin $r > 1$.

Exercice 6 (***)

Soient p, q deux nombres premiers distincts. Montrer

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Indications : Notant $\Delta_0 = [\![1\,;\, q-1]\!] \times [\![1\,;\, p-1]\!]$, déterminer Card Δ_0 en fonction de Δ_1 : $pk < q\ell$, $\Delta_2 : pk > q\ell$ et $\Delta_3 : pk = q\ell$. Considérer ensuite l'application $\varphi : \Delta_0 \to \Delta_0, (k, \ell) \mapsto (q-k, p-\ell)$.

Exercice 7 (***)

Soit $n \geqslant 3$ entier impair.

1. Soit p nombre premier impair et α entier non nul. Montrer

$$x^2 \equiv 1 \ [p^\alpha] \iff x \equiv \pm 1 \ [p^\alpha]$$

2. Combien y-a-t-il d'éléments x de $[\![1\,;\, n-1]\!]$ vérifiant $x^2 \equiv 1 \ [n]$?
3. Déterminer le nombre de carrés de $\mathrm{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$?

Indications : 1. Procéder par récurrence sur α.
2. Utiliser le théorème d'isomorphisme des restes chinois.
3. Résoudre $x^2 \equiv y^2 \ [n]$ dans $\mathrm{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.