TD+ 06 - corrigé

Équations différentielles linéaires, calcul différentiel

Exercice 1.

1. En écrivant $\chi_A = \prod_{j=1}^{k}(X-\lambda_j)^{m_j}$ (décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$), où $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}^*$, le lemme de décomposition des noyaux donne la décomposition en sous-espaces caractéristiques :
$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(A-\lambda_j)^{m_j}$$
Chaque $\mathrm{Ker}(A-\lambda_j)^{m_j}$ étant A-stable on a :
$$\forall\, j \in [\![1,k]\!],\ \forall\, x_j \in \mathrm{Ker}(A-\lambda_j)^{m_j},\ \mathrm{e}^{tA}x_j = \mathrm{e}^{t\lambda_j}\,\mathrm{e}^{t(A-\lambda_j I)}\,x_k = \mathrm{e}^{t\lambda_j}\left(\sum_{p=0}^{m_j-1}\frac{t^p}{p!}(A-\lambda_j I)^p\right)x_j$$
En notant $\|\cdot\|$ une norme quelconque de $\mathbb{C}^n$ (de dimension finie), il vient pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $j \in [\![1,k]\!]$:
$$\|\mathrm{e}^{tA}x_j\| \leqslant \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_j)}\,C_j(1+|t|)^{m_j-1}\|x_j\| \leqslant C\,\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_j)}(1+|t|)^{n-1}\|x_j\|$$
où $C_j \in \mathbb{R}_+$ et $C = \max_{1\leqslant j\leqslant k}(C_j) \geqslant 0$.
Puis, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ (en décomposant x selon les sous-espaces caractéristiques) :
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ |\mathrm{e}^{tA}x| \leqslant \sum_{j=1}^{k}\|\mathrm{e}^{tA}x_j\| \leqslant C(1+|t|)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k}\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_j)}\right)\max_{1\leqslant j\leqslant k}\|x_j\|$$
d'où l'inégalité demandée compte-tenu de l'équivalence des normes.
2. La solution du système linéarisé est $z : t \mapsto \mathrm{e}^{tA}x$. D'après l'hypothèse sur les valeurs propres de A, il existe $a>0$ tel que pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $\mathrm{Re}(\lambda_j) < a$. La question précédente permet d'obtenir :
$$\|z(t)\| \underset{t\to+\infty}{=} \|x\|\,\mathrm{e}^{-at}\,O(1)$$
si bien que $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \to +\infty$, l'origine est point d'équilibre attractif.
3. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\forall\, t \geqslant 0,\ \left|\left(\mathrm{e}^{tA}x\,\middle|\,\mathrm{e}^{tA}y\right)\right| \leqslant \|\mathrm{e}^{tA}x\|\,\|\mathrm{e}^{tA}y\| \leqslant K\|x\|\|y\|\,\mathrm{e}^{-2at}$$
où $K \in \mathbb{R}_+$. Ceci garantit la convergence absolue de l'intégrale définissant b. Cette dernière est bilinéaire, symétrique et positive (vérification immédiate). Enfin, si $x \in \mathbb{R}^n$:
$$q(x) = b(x,x) = \int_0^{+\infty}\|\mathrm{e}^{tA}x\|^2\,\mathrm{d}t = 0 \underset{\text{fonction continue} \geqslant 0}{\iff} \forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \|\mathrm{e}^{tA}x\| = 0 \underset{\mathrm{e}^{tA}\text{ inversible}}{\iff} x = 0$$
Donc q est définie positive.
4. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$q(x+ty) = q(x) + 2tb(x,y) + t^2q(y)$$
On dérive par rapport à t (polynôme) et on évalue en $t=0$, ce qui donne :
$$\mathrm{d}q(x)\cdot t = 2b(x,y)$$
En particulier :
$$\big(\nabla q(x)\,\big|\,Ax\big) = \mathrm{d}q(x)\cdot Ax = 2b(x,Ax) = \int_0^{+\infty}\underbrace{2\left(\mathrm{e}^{tA}x\,\middle|\,\mathrm{e}^{tA}Ax\right)}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathrm{e}^{tA}x\|^2}\mathrm{d}t = \lim_{T\to+\infty}\left(\|\mathrm{e}^{TA}x\|^2 - \|\mathrm{e}^{0A}x\|^2\right) = -\|x\|^2$$
5. On considère maintenant $y = y(t)$ et $y' = f(y) = Ay + r(y)$ et on calcule :
$$q(y)' = \mathrm{d}q(y)\circ y' = 2b(y,y') = 2b\big(y,Ay\big) + 2b\big(y,r(y)\big) = -\|y\|^2 + 2b\big(y,r(y)\big)$$
L'inégalité de Cauchy-Schwarz avec b donne :
$$\big|b\big(y,r(y)\big)\big| \leqslant \sqrt{q\big(y\big)}\sqrt{q\big(r(y)\big)}$$
Or $r(y) = f(y) - f(0) - \mathrm{d}f(0)\cdot y$, donc la définition de la différentielle donne : $r(y) \underset{y\to0}{=} o(y)$. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $q(y) \leqslant \alpha$, alors $\sqrt{q(r(y))} \leqslant \varepsilon\sqrt{q(y)}$.
Il s'ensuit que : $2b\big(y,r(y)\big) \leqslant 2\varepsilon q(y) \leqslant 2\varepsilon K\|y\|^2$ en utilisant l'équivalence des normes $\sqrt{q}$ et $\|\cdot\|$.
On pose alors $\beta = C - 2\varepsilon > 0$ (quitte à diminuer ε et α en conséquence), et on a alors :
$$q(y)' = -\|y\|^2 + 2b\big(y,r(y)\big) \leqslant -\beta q(y)$$
6. Supposons par l'absurde qu'il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $q(y(t)) > \alpha$. Comme cette inégalité n'est pas vérifiée en $t=0$, comme $t \mapsto q(y(t))$ est continue, il existe $t_0 > 0$ tel que $q(y(t_0)) = \alpha$. Mais alors $q(y)'(t_0) \leqslant -\beta\alpha < 0$: au voisinage à gauche de t_0 on a $q(y(t)) > 0$, ce qui est absurde.
Ainsi : $q(y) < \alpha \Longrightarrow \forall\, t \geqslant 0,\ q(y(t)) \leqslant \alpha$
On observe alors :
$$\big(\mathrm{e}^{\beta t}q(y)\big)' = e^{\beta t}\big(q(y)' + \beta q(y)\big) \leqslant 0$$
donc en primitivant avec la condition initiale $y(0) = x$ et en mutipliant par $\mathrm{e}^{-\beta t}$ il vient
$$\forall\, t \geqslant 0,\ q(y(t)) \leqslant \mathrm{e}^{-\beta t}\,q(x)$$
Ainsi $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 comme la solution z du système linéarisé.
On énoncé le théorème de Liapounov :

> Soit le système différentiel :
> $$y' = f(y), \quad y(0) = x$$
> où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f(0) = 0$. Si $\mathrm{d}f(0)$ a toutes ses valeurs propres de parties réelles strictement négatives, l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel : pour tout x assez voisin de 0, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 2.

1. On sait que pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ reliant x à y, on a $f(x)-f(y) = \int_0^1 \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t$.
   On prend $\gamma : t \mapsto tx+(1-t)y$ (le chemin le plus simple). Alors
   $$\begin{aligned} f(x)-f(y) &= \int_0^1 \langle \nabla f(tx+(1-t)y), x-y\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(tx+(1-t)y) - \nabla f(y), x-y\rangle \,\mathrm{d}t + \langle \nabla f(y), x-y\rangle. \end{aligned}$$
   Mais, pour tout t dans $]0,1[$,
   $$\begin{aligned} \langle \nabla f(tx+(1-t)y) - \nabla f(y), x-y\rangle &= \frac{1}{t}\langle \nabla f(tx+(1-t)y) - \nabla f(y), t(x-y)\rangle \\ &= \frac{1}{t}\langle \nabla f(tx+(1-t)y) - \nabla f(y), tx+(1-t)y-y\rangle \\ &\geqslant \frac{1}{t}\alpha\|t(x-y)\|^2 \\ &\geqslant t\alpha\|x-y\|^2. \end{aligned}$$
   Donc $f(x)-f(y) \geqslant \int_0^1 t\alpha\|x-y\|^2\,\mathrm{d}t + \langle \nabla f(y), x-y\rangle$, soit $f(x)-f(y) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2 + \langle \nabla f(y), x-y\rangle$
2. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$, t dans $[0,1]$. Alors on applique l'inégalité précédente entre $tx+(1-t)y$ et x, puis entre $tx+(1-t)y$ et y. Ceci donne :
   $$\begin{aligned} f(x) &\geqslant f(tx+(1-t)y) + \langle \nabla f(tx+(1-t)y), x-(tx+(1-t)y)\rangle + \frac{\alpha}{2}\|x-(tx+(1-t)y)\|^2 \\ &\geqslant f(tx+(1-t)y) + (1-t)\langle \nabla f(tx+(1-t)y), x-y\rangle + (1-t)^2\frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2 \\ f(y) &\geqslant f(tx+(1-t)y) + \langle \nabla f(tx+(1-t)y), y-(tx+(1-t)y)\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y-(tx+(1-t)y)\|^2 \\ &\geqslant f(tx+(1-t)y) - t\langle \nabla f(tx+(1-t)y), x-y\rangle + t^2\frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2. \end{aligned}$$
   Soit, en faisant $tL_1 + (1-t)L_2$, on obtient l'inégalité désirée.
3. Déjà, $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par théorème de comparaison.
   Si $M = f(0)$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n, | f(x) \leqslant M\}$ est un compact (fermé car f est continue et borné car $f \to +\infty$).
   Sur ce compact, f atteint son minimum, inférieur à M, et en-dehors, f est plus grande que M.
   L'unicité du minimum vient du fait que si x et y sont deux points de minimum sur $\mathbb{R}^n$, alors $\nabla f(x)$ et $\nabla f(y)$ sont nuls. L'ellipticité assure alors que $x = y$.
4. (a)
   (b) Essayons d'exprimer $x_{k+1}-x^*$ à l'aide de $x_k - x^*$:
   $$\begin{aligned} \|x_{k+1}-x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \rho\nabla f(x_k)\|^2 \\ &= \|x_k-x^*\|^2 - 2\rho\langle x_k - x^*, \nabla f(x_k)\rangle + \rho^2\|\nabla f(x_k)\| \\ &\leqslant \|x_k-x^*\|^2 - 2\alpha\rho\|x_k-x^*\|^2 + \rho^2M^2\|x_k-x^*\|^2 \\ &\leqslant (1-2\alpha\rho+M^2\rho^2)\|x_k-x^*\|^2. \end{aligned}$$
   Il suffit alors de prendre $\rho < \frac{2\alpha}{M}$ pour avoir $0 \leqslant 1-2\alpha\rho+M^2\rho^2 < 1$ et avoir convergence géométrique.

Exercice 3.

1. Soient f radiale et harmonique, φ telle que pour tous x et y, $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = f(\sqrt{t},0)$, φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant $\Delta f = 0$, on obtient : $\forall r > 0$, $\varphi''(r) + \frac{1}{r}\varphi'(r) = 0$.
   On en déduit $\varphi : r \mapsto A\ln(r) + B$, donc $f : (x,y) \mapsto A\ln(x^2+y^2)+B$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
   Remarque : si f est aussi définie et continue en $(0,0)$, alors f est constante, ce qui répond à la formulation initiale de la question (énoncé modifié depuis la séance).
2. (a) Soit $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0+t, y_0)$. Cette fonction admet un maximum sur un intervalle ouvert en $t = 0$, donc $g''(0) \leqslant 0$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \leqslant 0$. Idem pour y.
   (b) Déjà, f_p atteint bien son maximum sur D car continue sur un compact. Ensuite, si le maximum est atteint à l'intérieur, on a $\Delta f_p \leqslant 0$. Or, $\Delta f_p = \Delta f + \frac{4}{p} > 0$. Donc le maximum de f_p est atteint sur C.
   Soit p dans $\mathbb{N}^*$, $z_p = (x_p, y_p)$ un point de C en lequel f_p atteint son maximum M_p. Comme C est compact, on dispose d'une extraction φ telle que $(z_{\varphi(p)})$ converge. Par passage à la limite grâce à la continuité, on montre que sa limite est un point $z^* \in C$ pour lequel f atteint son maximum. Donc le maximum de f est bien atteint sur C.
   (c) Soient f et g harmoniques, telles que $f = g$ sur un cercle C. On note D le disque délimité par C. Alors $f-g$ est harmonique et donc atteint son maximum sur D sur C, qui est nul, donc $f-g \leqslant 0$ sur D. De même, $g - f \leqslant 0$, donc $f = g$.
   Cela signifie qu'une application harmonique est entièrement déterminée par sa valeur au bord d'un domaine : c'est ce que vous utilisez en physique pour résoudre l'équation de Poisson.
