TD+ 06

Équations différentielles linéaires, calcul différentiel

Exercice 1. [Fonction de Liapounov et stabilité]
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $f(0) = 0$ et on note $A = \mathrm{d}f(0)$.
Le but de l'exercice est de comparer le comportement des solutions du système différentiel

$$y' = f(y),\ y(0) = x$$

à celui des solutions du système linéarisé au voisinage de l'équilibre 0 :

$$z' = Az,\ z(0) = x$$

On suppose que toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne correspondante.

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que :
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \|\mathrm{e}^{tA} x\| \leqslant P(|t|)\left(\sum_{j=1}^{k} \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_j)}\right)\|x\|$$
2. En déduire le comportement de $z(t)$ quand $t \to +\infty$.
3. Déduire de 1. que l'intégrale
$$b(x,y) = \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{tA} x \,\middle|\, \mathrm{e}^{tA} y\right) \mathrm{d}t$$
définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, et que la forme quadratique $q : x \mapsto b(x,x)$ (appelée *fonction de Liapounov*) est définie positive (*i.e.* b définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$).
4. Vérifier l'égalité :
$$\left(\nabla q(x) \,\middle|\, Ax\right) = 2b(x, Ax) = -\|x\|^2$$

Dans la suite on admet l'existence d'une solution $y(t)$ du problème initial, définie pour tout $t \geqslant 0$. On note $r(y) = f(y) - Ay$.

5. Vérifier l'égalité :
$$q(y)' = -\|y\|^2 + 2b\big(y, r(y)\big)$$
et montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :
$$q(y) \leqslant \alpha \Longrightarrow -\|y\|^2 + 2b\big(y, r(y)\big) \leqslant -\beta q(y)$$
6. En déduire
$$q(x) < \alpha \Longrightarrow \forall\, t \geqslant 0, q\big(y(t)\big) \leqslant \alpha$$
et finalement :
$$\forall\, t \geqslant 0,\ q\big(y(t)\big) \leqslant \mathrm{e}^{-\beta t} q(x)$$
Énoncer le résultat obtenu pour le système différentiel.

Exercice 2. [méthode du gradient]
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$, $\alpha > 0$ et $M > 0$ vérifiant :
- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geqslant \alpha\|x-y\|^2$ (on dit que f est α-elliptique)
- ∇f est M-lipschitzienne : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leqslant M\|x-y\|$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f(x) - f(y) \geqslant \langle \nabla f(y), x - y\rangle + \dfrac{\alpha}{2}\|x-y\|^2$.
2. Démontrer que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall\, t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y) - \dfrac{\alpha}{2} t(1-t)\|x-y\|^2$.
Démontrer qu'en particulier, f est convexe.
3. Montrer que f admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$, que l'on nommera x^*.

4. Soit $\rho > 0$. On définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout k dans $\mathbb{N}$, $x_{k+1} = x_k - \rho\nabla f(x_k)$.
Cette méthode est appelée méthode du gradient à pas constant.
   (a) Illustrer la méthode dans le cas réel.
   (b) Montrer que sous une condition sur ρ, la suite (x_k) converge vers x^*, et évaluer la vitesse de convergence.

Exercice 3. [fonctions harmoniques]
On dit qu'une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, est harmonique si et seulement si $\Delta f = 0$.

1. On dit que f est radiale s'il existe $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.
Déterminer les applications radiales et harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Principe du maximum :
   (a) Démontrer qu'une fonction f deux fois différentiable qui atteint son maximum en un point (x_0, y_0) d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leqslant 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leqslant 0$.
   (b) Soit f harmonique, D le disque fermé de centre O de rayon $r > 0$ et C le cercle correspondant. Pour p entier strictement positif, on pose $f_p(x, y) = f(x, y) + \dfrac{x^2 + y^2}{p}$.
   En étudiant le maximum de f_p sur D, démontrer que le maximum de f sur D est atteint sur C.
   (c) En déduire que deux fonctions harmoniques égales sur un cercle sont égales sur le disque délimité par le cercle.

Indications.

Ex1 :
1. Utiliser le lemme des noyaux.
3. Pour la convergence de l'intégrale, penser à Cauchy-Schwarz.
4. On pourra commencer par considérer $q(x + ty)$ pour faire apparaître la différentielle de q.
5. Pour la première égalité, procéder comme en 4.
Pour la suite, traduire la différentiabilité de f en 0 en utilisant la norme définie par q plutôt que $\|\cdot\|$.
6. Raisonner par l'absurde pour établir la première inégalité.
Pour la suite considérer $\left(\mathrm{e}^{\beta t}\, q(y)\right)'$.

Ex2 :
1. Utiliser le chemin $\gamma : t \mapsto tx + (1 - t)y$ qui relie y à x et la formule de l'intégrale le long d'un chemin.
2. Appliquer l'inégalité précédente entre $tx + (1 - t)y$ et x, puis entre $tx + (1 - t)y$ et y.
3. Utiliser le plus simple des théorèmes de cours sur l'existence d'extremums atteints, et utiliser l'ellipticité pour l'unicité.
4. Montrer par récurrence une convergence géométrique.

Ex3 :
1. Montrer que φ vérifie une équation différentielle que l'on peut résoudre (montrer d'abord que φ' vérifie une équation différentielle du premier ordre).
2. (a) Utiliser la condition de maximum des fonctions réelles et dériver selon une direction.
   (b) Utiliser la question précédente et ne pas oublier que f est harmonique.
   (c) Si $f = g$ sur un cercle, étudier $f - g$ et $g - f$.

⋆⋆⋆⋆⋆ Fin ⋆⋆⋆⋆⋆