ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille de révisions n°1

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 2 (**)

Vérifier l'existence puis calculer $$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$.

1. On suppose $\forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad |a_{i,i}| > \mathrm{R}_i \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}_i = \sum_{j\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\setminus\{i\}} |a_{i,j}|$

   Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. Pour $(a,\mathrm{R}) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}_+$, on note $\mathrm{D}_f(a,\mathrm{R}) = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-a| \leqslant \mathrm{R}\}$. Montrer

   $$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathrm{D}_f(a_{i,i},\mathrm{R}_i)$$

   Les ensembles $\mathrm{D}_f(a_{i,i},\mathrm{R}_i)$ sont appelés *disques de Gerschgorin.*

Exercice 4 (**)

Pour x réel, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que F est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.
   On admet l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, diagonalisables et tels que $u\circ v = v\circ u$. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation pour u et v.

Exercice 6 (*)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t$$

Exercice 7 (**)

Soit X un ensemble et $\mathrm{E} = \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit L une forme linéaire sur E *positive*, c'est-à-dire
$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad f \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{L}(f) \geqslant 0$$

1. Montrer $$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{L}(f) \leqslant \mathrm{L}(g)$$
2. En déduire que L est une application continue.
3. Montrer $$\mathrm{L} \neq 0 \iff \mathrm{L}(1) \neq 0$$
4. Établir $$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{L}(fg)^2 \leqslant \mathrm{L}(f^2)\mathrm{L}(g^2)$$

Exercice 8 (**)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul, $\mathscr{B}$ base orthonormée de E et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$.

1. Établir $$|\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^n \|x_k\|$$
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 9 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y indépendantes de loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,;\, n]\!])$ avec n entier non nul. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X})$ puis $\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X} \cap \mathrm{Y})$.

Exercice 10 (**)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \\ u_0 > 2 \end{cases}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.

Exercice 11 (****)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ telle que
$$\forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$$

1. Soit $a \in \mathrm{X}$. Montrer que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que f est une isométrie, *i.e.* $$\forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$
3. Montrer que f est une bijection de X sur X.