ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille de révisions n°2

Exercice 1 (*)

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E euclidien. Montrer

$$u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff u \text{ symétrie orthogonale}$$

Exercice 2 (***)

1. Justifier l'existence de $\qquad \mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
2. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathrm{I}$ puis en déduire la valeur de I.

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $\mathrm{A} \subset \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on note

$$\mathcal{C}(\mathrm{A}) = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \ : \ \forall v \in \mathrm{A} \quad u \circ v = v \circ u\}$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier le *bicommutant* $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre contenant $\mathbb{K}[f]$.
2. Soient A, B incluses dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}(\mathrm{B}) \subset \mathcal{C}(\mathrm{A})$$

3. On suppose f *cyclique*, c'est-à-dire il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
   (a) Établir $\qquad \mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]$
   (b) En déduire $\qquad \mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$

Exercice 4 (***)

On pose $\qquad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$

1. Étudier la définition, la continuité et dérivabilité de S.
2. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

Exercice 5 (**)

Soit a vecteur unitaire d'un espace euclidien E, α un réel et f_α définie par

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, a\rangle a$$

1. Justifier que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer que $f_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \alpha \neq -1$. Décrire f_{-1}.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour avoir $f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Quand la condition est réalisée, décrire f_α.

Exercice 6 (**)

Déterminer le rayon puis la somme de $\sum \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$.

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn.

1. Soit $(x_n)_n$ suite à valeurs dans E pour laquelle il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad n \neq p \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$$
Montrer que $(x_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente.
2. Soit K un compact de E. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p non nul et $x_1, \ldots, x_p$ dans E tels que
$$\mathrm{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$$

Exercice 8 (***)

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + \ldots + t^{n-1}}$$

Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n par rapport à $\dfrac{1}{n}$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 9 (***)

On note E l'espace des fonctions continue sur $\mathbb{R}_+$ ayant une limite finie en $+\infty$. Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{T}_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \quad \text{et} \quad \forall (\alpha, t) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad f_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

1. Justifier que la suite $(\mathrm{T}_n(f))_{n\geqslant 1}$ est bien définie pour $f \in \mathrm{E}$.
2. Calculer $\mathrm{T}_n(f_\alpha)$ pour $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ puis déterminer le comportement asymptotique de la suite $(\mathrm{T}_n(f_\alpha))_{n\geqslant 1}$.
3. Soit $f \in \mathrm{E}$. En considérant h définie sur $[\,0\,;1\,]$ par
$$h(u) = \begin{cases} f(-\ln u) & \text{si } u \in \,]\,0\,;1\,] \\ \lim\limits_{+\infty} f & \text{si } u = 0 \end{cases}$$
déterminer le comportement asymptotique de la suite $(\mathrm{T}_n(f))_{n\geqslant 1}$.
4. Soit $f \in \mathrm{E}$ puis $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{P}(1)$ et $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul.
   (a) Calculer $\mathbb{E}\left[f\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right]$ pour n entier non nul.
   (b) En déduire une nouvelle démonstration du résultat de la question 3.