Corrigé de l'épreuve Mathématiques I, Centrale 2021, filière PC.

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*
Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

I. Etude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

I.A - Espérance et variance de S_n

Q 1. La variable Y_n compte le nombre de succès (pas $+1$) lors de n expériences de Bernoulli de paramètre p. On en déduit que $\boxed{Y_n \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n,p)}$, que $\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = np}$ et que $\boxed{\mathbb{V}(Y_n) = np(1-p)}$.

Q 2. On a de suite

$$\underline{S_n = Y_n - (n - Y_n) = 2Y_n - n}.$$

On en déduit par linéarité de l'espérance

$$\underline{\mathbb{E}(S_n) = 2\mathbb{E}(Y_n) - n = (2p-1)n}$$

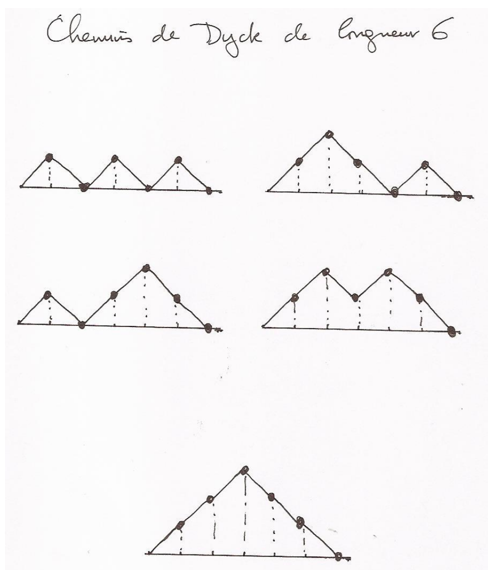
et que

$$\underline{\mathbb{V}(S_n) = 4\mathbb{V}(Y_n) = 4np(1-p)}.$$

Enfin, comme $2Y_n$ est un entier pair et comme la somme d'un entier pair et d'un entier pair (*resp.* impair) est paire (*resp.* impaire), on en déduit que <u>S_n et n ont même parité</u>.

I.B - Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine

Q 3. On a $\boxed{C_3 = 5}$. Voici les 5 chemins de Dyck de longueur 6.



Q 4. Une preuve me semble plus convaincante qu'un dessin ici...
On a

$$0 < s_\gamma(2r+1) = s_\gamma(2r) + \gamma_{2r+1} = \gamma_{2r+1}$$

donc $\boxed{\gamma_{2r+1} = 1}$.
De façon analogue,

$$s_\gamma(2n+2) = 0 = s_\gamma(2n+1) + \gamma_{2n+2} > \gamma_{2n+2}$$

donc $\boxed{\gamma_{2n+2} = -1}$.
Comme $s_\alpha(2r) = s_\gamma(2r) = 0$ et $s_\alpha(k) = s_\gamma(k) \geq 0$ pour tout $k \in [\![1, 2r]\!]$, <u>le chemin α est un chemin</u>

de Dyck.
Enfin, pour tout $k \in [\![1, 2n-2r]\!]$,

$$s_\beta(k) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_{2r+1+i} = s_\gamma(2r+1+k) - s_\gamma(2r) - \gamma_{2r+1} = s_\gamma(2r+1+k) - 1.$$

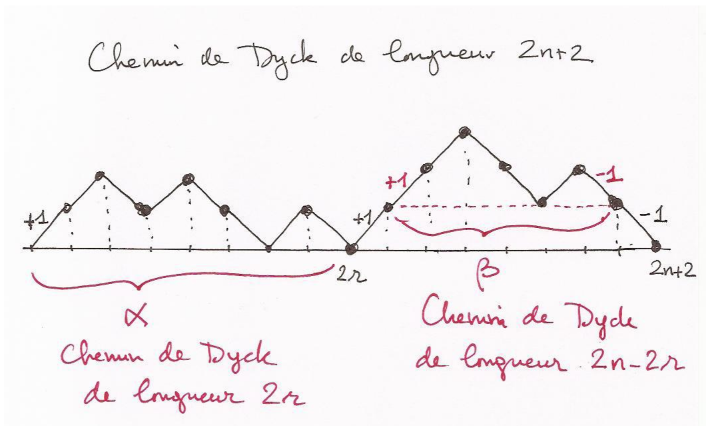
Or, par définition de r, on a pour tout $k \in [\![1, 2n-2r-1]\!]$, $s_\gamma(2r+1+k) > 0$ donc

$$s_\beta(k) = s_\gamma(2r+1+k) - 1 \geq 0.$$

Et

$$s_\beta(2n-2r) = s_\gamma(2n+1) - 1 = s_\gamma(2n+2) - \gamma_{2n+2} - 1 = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Ce qui montre que le chemin β est un chemin de Dyck.
Voici quand même une figure illustrant tout cela.



Q 5. On a par indépendance des X_j,

$$\mathbb{P}(A_{t,\gamma}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{2n} (X_{t+k} = \gamma_k)\right) = \prod_{k=1}^{2n} \mathbb{P}(X_{t+k} = \gamma_k).$$

Chaque $\mathbb{P}(X_{t+k} = \gamma_k)$ vaut p ou $1-p$ suivant que γ_k vaut 1 ou -1. Mais comme γ est un chemin de Dyck de longueur $2n$, il est composé de n pas égaux à 1 et de n pas égaux à -1. On en déduit que

$$\mathbb{P}(A_{t,\gamma}) = p^n(1-p)^n.$$

Q 6. Comme $T(\omega) = k \Rightarrow S_k = 0$ et comme 0 est pair, on déduit de **Q2** que $T(\omega) = k$ implique k pair. Ainsi, T ne prend que des valeurs paires.
Afin que $T(\omega) = 2n+2$, il faut et il suffit que $(X_1(\omega), \dots, X_{2n+2}(\omega)) = \pm(1, \gamma_1, \dots, \gamma_{2n}, -1)$ où $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ est un chemin de Dyck. Si l'on note D_{2n} l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n$, on a donc par indépendance des X_j,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = 2n+2) &= p \times \left(\sum_{\gamma \in D_{2n}} \mathbb{P}(A_{1,\gamma})\right) \times (1-p) + (1-p) \times \left(\sum_{\gamma \in D_{2n}} \mathbb{P}(A_{1,-\gamma})\right) \times p \\
&= p \times \big(\mathrm{card}(D_{2n}) p^n (1-p)^n\big) \times (1-p) + (1-p) \times \big(\mathrm{card}(D_{2n})(1-p)^n p^n\big) \times p \\
&= 2C_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}.
\end{aligned}$$

I.B.1) Série génératrice des nombres de Catalan

Q 7. Soit γ un chemin de Dyck de longueur $2n+2$. Soit r comme défini dans l'énoncé en préambule de **Q4**.
Si $r = 0$, alors γ est de la forme $(1, \beta_1, \dots, \beta_{2n}, -1)$ où β est un chemin de Dick quelconque de longueur $2n$. Et réciproquement. Il y a donc C_n tels chemins avec $r = 0$, et comme $C_0 = 1$, il y a $C_n C_0$ tels chemins.
Si $r = n$, alors γ est constitué d'un chemin de Dyck de longueur $2n$ suivi du chemin $(1, -1)$. Il y

a donc C_n tels chemins.
Si $0 < r < n$, alors d'après **Q4**, γ est de la forme $(\alpha, 1, \beta, -1)$ où α et β sont des chemins de Dyck de longueur respective $2r$ et $2n-2r$. Et réciproquement. Il y a donc $C_r \times C_{n-r}$ tels chemins.
On trouve finalement

$$\underline{C_{n+1} = C_n + \sum_{r=1}^{n-1} C_r C_{n-r} + C_n = \sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}.}$$

Q 8. Les événements $(T = 2n+2)$, $n \in \mathbb{N}$, étant incompatibles, la série $\sum \mathbb{P}(T = 2n+2)$ est convergente de somme ≤ 1. Ceci est vrai pour toute valeur de p et donc en particulier pour $p = 1/2$. A l'aide de **Q6**, on en déduit que $\sum \frac{2C_n}{4^{n+1}}$ est convergente et donc que $\boxed{\sum \frac{C_n}{4^n} \text{ est aussi convergente}}$.

Q 9. Pour $t \in [-1/4, 1/4]$, on a de suite $|C_n t^n| \leq C_n/4^n$ et la question précédente montre de suite que la série entière $\sum C_n t^n$ est <u>normalement convergente sur $[-1/4, 1/4]$</u>.

Q 10. Pour $t \in [-1, 1]$, on a en tenant compte du fait que T ne prend que des valeurs paires :

$$\begin{aligned}
G_T(t) &= \mathbb{P}(T=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = 2k) t^{2k} \\
&= \mathbb{P}(T=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} 2C_{k-1} p^k (1-p)^k t^{2k} \\
&= \mathbb{P}(T=0) + 2\sum_{k=0}^{+\infty} C_k p^{k+1} (1-p)^{k+1} t^{2k+2} \\
&= \mathbb{P}(T=0) + 2p(1-p)t^2 \sum_{k=0}^{+\infty} C_k (p(1-p)t^2)^k \\
&= \mathbb{P}(T=0) + g\big(p(1-p)t^2\big).
\end{aligned}$$

Q 11. D'après **Q9**, la série entière g est de rayon de convergence $\geq 1/4$ donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1/4, 1/4[$.
De plus, $\boxed{\text{pour } p \neq 1/2}$, on a $0 \leq t^2(p(1-p)) \leq p(1-p) < 1/4$ pour tout $t \in [-1, 1]$. On en déduit que G_T est dérivable en $t = 1$ et donc que $\boxed{T \text{ admet une espérance } \mathbb{E}(T) = G'_T(1)}$.

Q 12. Sur $[-1/4, 1/4]$, on peut calculer $g^2(t)$ comme produit de Cauchy et utiliser **Q7**. On a donc

$$\begin{aligned}
\forall t \in [-1/4, 1/4],\ g^2(t) &= 4t^2 f^2(t) \\
&= 4t^2 \sum_{n \geq 0} C_n t^n \sum_{m \geq 0} C_m t^m \\
&= 4t^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{r=0}^{k} C_r C_{k-r}\Big) t^k \\
&= 4t^2 \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+1} t^k \\
&= 4t \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+1} t^{k+1} \\
&= 4t \sum_{j=1}^{+\infty} C_j t^j \\
&= 4t\big(f(t) - 1\big) = 2 \times 2t f(t) - 4t \\
&= \underline{2g(t) - 4t}.
\end{aligned}$$

Q 13. A t fixé dans I, l'équation $X^2 - 2X + 4t = 0$ a pour solutions $1 \pm \sqrt{1-4t}$. D'après la question précédente, pour tout $t \in [-1/4, 1/4]$, il existe $\varepsilon(t) \in \{-1, 1\}$ tel que $\boxed{g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1-4t}}$.

Q 14. La fonction

$$t \mapsto \varepsilon(t) = \frac{g(t) - 1}{\sqrt{1-4t}}$$

est continue sur $I\backslash\{1/4\}$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. Etant à valeurs dans $\{-1,1\}$ et $I\backslash\{1/4\}$ étant un intervalle, le théorème des valeurs intermédiaires assure que ε est constante sur $I\setminus\{1/4\}$. Comme $g(0)=0$, on en déduit que $\varepsilon(0)=-1$ et donc que

$$\forall t\in I\setminus\{1/4\},\ g(t)=1-\sqrt{1-4t}.$$

Pour $t=1/4$, on a $g(1/4)=1\pm 0=1$ donc l'égalité précédente est encore vraie. On a donc bien

$$\underline{\forall t\in I,\ g(t)=1-\sqrt{1-4t}.}$$

Q 15. A l'aide de **Q10**, on a de suite

$$G_T(1)=1=\mathbb{P}(T=0)+\mathbb{P}(T\neq 0)=\mathbb{P}(T=0)+g\big(p(1-p)\big)$$

et donc

$$\underline{\mathbb{P}(T\neq 0)=1-\sqrt{1-4p(1-p)}}.$$

Pour $p=1/2$, on en déduit que $\mathbb{P}(T\neq 0)=1$, ce qui signifie qu'avec probabilité égale à 1, $\boxed{\text{la marche (symétrique sur } \mathbb{Z}\text{) finit par repasser par } 0}$.

Q 16. Pour $p=1/2$, on a

$$\forall t\in[-1,1],\ G_T(t)=\mathbb{P}(T=0)+g\big(t^2/4\big)=0+1-\sqrt{1-t^2}=1-\sqrt{1-t^2}.$$

On en déduit que G_T n'est pas dérivable en 1 et donc que $\boxed{T\text{ n'a pas d'espérance}}$.

I.C - Espérance des nombres de Catalan et équivalent

Q 17. On a pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2} &= \sum_{n\geq 0}\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)\cdots(1/2-n+1)}{n!}x^n\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n-1}1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{n!\,2^n}x^n\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!\,(n-1)!2^{2n-1}}x^n\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\,n}\binom{2n-2}{n-1}x^n\\
&= 1+\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(n+1)}\binom{2n}{n}x^{n+1}
\end{aligned}.$$

On a donc le résultat voulu avec $\boxed{a_n=\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}(n+1)}\dbinom{2n}{n}}$.

Q 18. Pour $p=1/2$, on a

$$g(t)=2t\sum_{n\geq 0}C_nt^n=1-\sqrt{1-4t}$$

et donc

$$2\sum_{n\geq 0}C_nt^{n+1}=-\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(n+1)}\binom{2n}{n}(-1)^{n+1}4^{n+1}t^{n+1}=2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}t^{n+1}.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que

$$\underline{\forall n\geq 0,\ C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}.$$

Q 19. On a

$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}.$$

On en déduit sans peine que
$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$$
puis que
$$C_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}.$$

Q 20. Pour $\boxed{p \neq 1/2}$, on a
$$(2n+2)\mathbb{P}(T=2n+2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2p(1-p)\times 2n\frac{\big(4p(1-p)\big)^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}} = C\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}} \text{ avec } \alpha = 4p(1-p) \in [0,1[\text{ et } C>0.$$
Comme $\alpha \in [0,1[$, la série à termes positifs $\sum \alpha^n/\sqrt{n}$ est convergente. Il en est donc de même pour la série $\sum n\mathbb{P}(T=n)$ ce qui montre bien que <u>T admet une espérance</u>.

Pour $\boxed{p = 1/2}$, on a
$$(2n+2)\mathbb{P}(T=2n+2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C'}{\sqrt{n}}$$
où C' est une constante >0. La série à termes positifs $\sum 1/\sqrt{n}$ est divergente. Il en est donc de même pour la série $\sum n\mathbb{P}(T=n)$ ce qui montre bien que <u>T n'admet pas d'espérance</u>.

II. Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

II.A - Définition et propriétés d'un système orthogonal

Q 21. Les $(V_k)_{0\le k\le n}$ forment une famille libre (au choix car elle est échelonnée ou car elle est orthogonale et constituée de polynômes non nuls) de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$. C'est donc <u>une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$</u>.

Q 22. Comme $\deg(P) < n$, $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}(V_0,\dots,V_{n-1})$. Comme V_n est orthogonal à tout V_k pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, on en déduit que $\boxed{(V_n \mid P) = 0}$.

Q 23. La question précédente montre que pour tout n,
$$\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus^\perp \mathrm{Vect}(V_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus^\perp \mathrm{Vect}(W_n)$$
et par unicité du supplémentaire orthogonal que $\mathrm{Vect}(V_n) = \mathrm{Vect}(W_n)$. On en déduit que W_n est proportionnel à V_n et les deux étant unitaires, que $\boxed{W_n = V_n}$.

II.B - Expression de $\det(G_n)$ à l'aide de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q 24. Par définition de Q_n, on a pour tout j,
$$V_{j-1} = \sum_{i=1}^{n+1} q_{i,j}X^{i-1}.$$
Comme $\deg(V_{j-1}) = j-1$, on en déduit que $q_{i,j} = 0$ si $i-1 > j-1$, autrement dit que $i > j \Rightarrow q_{i,j} = 0$. Ceci montre que <u>$Q_n$ est triangulaire supérieure</u>.
De plus, V_{j-1} étant unitaire, on en déduit que $q_{i,i} = 1$ pour tout i. La matrice Q_n est donc triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont tous égaux à 1. Ceci implique bien sûr que $\boxed{\det(Q_n) = 1}$.

Q 25. Le terme (i,j) de la matrice $Q_n^T G_n Q_n$ est égal à
$$\sum_{l=1}^{n+1} q_{i,l}^T \sum_{k=1}^{n+1} (X^{l-1} \mid X^{k-1}) q_{k,j} = \sum_{l=1}^{n+1} q_{l,i} \sum_{k=1}^{n+1} (X^{l-1} \mid X^{k-1}) q_{k,j}.$$
Par bilinéarité du produit scalaire, cette expression est égale à
$$\left(\sum_{l=1}^{n+1} q_{l,i}X^{l-1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} q_{k,j}X^{k-1}\right) = (V_{i-1} \mid V_{j-1}).$$

Ceci montre bien que $\boxed{Q_n^T G_n Q_n = G'_n}$.

Q 26. On en déduit à l'aide de ce qui précède que

$$\det(G'_n) = \det(Q_n^T)\det(G_n)\det(Q_n) = 1 \times \det(G_n) \times 1.$$

Or, la matrice G'_n est diagonale par orthogonalité des V_k et donc $\det(G'_n) = \prod_{i=0}^{n}(V_i \mid V_i) = \prod_{i=0}^{n}\|V_i\|^2$.

Finalement,

$$\underline{\det(G_n) = \prod_{i=0}^{n}\|V_i\|^2.}$$

III. Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

III.A - Produit scalaire

Q 27. La fonction $x \mapsto P(4x)Q(4x)\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est définie et continue sur $]0,1]$. De plus, lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = O(1/\sqrt{x}).$$

La fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ étant intégrable sur $]0,1]$, on en déduit que la fonction $x \mapsto P(4x)Q(4x)\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est $\underline{\text{intégrable sur }]0,1]}$.

Q 28. La question précédente montre que $(\cdot \mid \cdot)$ est bien défini. La symétrie et la bilinéarité sont immédiates. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $(P \mid P) \geq 0$ par positivité de l'intégrale. Si $(P \mid P) = 0$, la fonction $x \mapsto P^2(4x)\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est continue, à valeurs positives sur $]0,1]$ et d'intégrale nulle. Elle y est donc identiquement nulle. Ceci montre que le polynôme P est nul sur $]0,4[$, ayant une infinité de racines, P est donc le polynôme nul. $\underline{\text{Tout ceci montre que } (\cdot \mid \cdot) \text{ est bien un produit scalaire}}$.

III.B - Système orthogonal

Q 29. Une récurrence double immédiate laissée au lecteur montre que pour tout n, $\underline{U_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n}$. De plus, pour tout n,

$$U_{n+2}(0) + 2U_{n+1}(0) + U_n(0) = 0.$$

Il existe donc deux constantes λ et μ telles que pour tout n,

$$U_n(0) = (\lambda + \mu n)(-1)^n.$$

Comme $U_0(0) = 1$ et $U_1(1) = -1$, on en déduit de suite que $\lambda = 1$, $\mu = 0$ puis que

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n(0) = (-1)^n}.$$

Q 30. Pour tout n, notons

$$\mathcal{P}(n)\ : \forall \theta \in \mathbb{R},\ U_n(4\cos^2\theta)\sin\theta = \sin\big((2n+1)\theta\big).$$

On démontre par récurrence double que pour tout n, $\mathcal{P}(n)$ est vérifié.

Initialisation. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$U_0(4\cos^2\theta)\sin\theta = 1 \times \sin\theta = \sin\theta \text{ et } U_1(4\cos^2\theta)\sin\theta = (4\cos^2\theta - 1)\sin\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin(3\theta).$$

Hérédité. Pour n fixé quelconque, supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vérifiées. On a alors

$$\begin{aligned}
\forall \theta \in \mathbb{R},\ U_{n+2}(4\cos^2\theta)\sin\theta &= (4\cos^2\theta - 2)\sin\big((2n+3)\theta\big) - \sin\big((2n+1)\theta\big)\\
&= 2\cos(2\theta)\sin\big((2n+3)\theta\big) - \sin\big((2n+1)\theta\big)\\
&= \sin\big((2+2n+3)\theta\big) - \sin\big((2-2n-3)\theta\big) - \sin\big((2n+1)\theta\big)\\
&= \sin\big((2n+5)\theta\big).
\end{aligned}$$

Ceci achève l'hérédité et la récurrence.

Q 31. Des calculs classiques (formules trigonométriques réelles ou passage par les formules d'Euler) donnent

$$\int_0^{\pi/2} \sin\big((2m+1)\theta\big)\sin\big((2n+1)\theta\big)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \pi/4 \text{ si } n = m. \end{cases}$$

Q 32. On a

$$(U_m \mid U_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 U_m(4x)U_n(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \underset{x=\cos^2\theta}{=} \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^0 U_m(4\cos^2\theta)U_n(4\cos^2\theta)\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}2\cos(\theta)(-\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta.$$

Et donc à l'aide des deux questions précédentes

$$(U_m \mid U_n) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\big((2m+1)\theta\big)\sin\big((2n+1)\theta\big)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ 1 \text{ si } n = m. \end{cases}$$

III.C - Application

Q 33. On a en suivant l'indication de l'énoncé à nouveau, pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 4^n x^n \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 4^n x^{n-1/2}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\text{I.P.P.}}{=} \frac{2\times 4^n}{\pi}\left(\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}x^{n-1/2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}(n-1/2)x^{n-3/2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2\times 4^n}{\pi}\times\frac{2n-1}{3}\int_0^1 x^{n-3/2}(1-x)\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\times 4^n}{\pi}\times\frac{2n-1}{3}\left(\int_0^1 x^{n-3/2}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{n-1/2}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2n-1}{3}\left(\frac{2\times 4^n}{4^{n-1}\pi}\int_0^1 4^{n-1}x^{n-1-1/2}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x - \frac{2\times 4^n}{\pi}\int_0^1 x^{n-1/2}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2n-1}{3}\left(4\mu_{n-1} - \mu_n\right).
\end{aligned}$$

Q 34. On a

$$\forall n \geq 1,\ \mu_n = \frac{2(2n-1)}{n+1}\mu_{n-1} \text{ et } \mu_0 = (1 \mid 1) = \|U_0\|^2 = 1.$$

Or,

$$\frac{2(2n-1)}{n+1}C_{n-1} = \frac{2(2n-1)}{n+1}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{2(2n-1)}{n+1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{2\times(2n)!\times n}{(n+1)\times 2n\times n!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

Les suites (μ_n) et (C_n) vérifient la même relation de récurrence d'ordre 1 et vérifient aussi $C_0 = \mu_0$.

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \mu_n}$.

Q 35. En observant que pour tout i, j,

$$(X^{i-1} \mid X^{j-1}) = (X^{i+j-2} \mid 1) = \mu_{i+j-2} = C_{i+j-2},$$

on en déduit en appliquant **Q26** au système orthogonal $(U_0, \ldots, U_n)$ que

$$\underline{H_n = \prod_{i=0}^n \|U_i\|^2 = 1.}$$

III.D - Un autre déterminant de Hankel

Q 36. Par linéarité de l'intégrale et du déterminant par rapport à la dernière ligne, on a pour tout $k < n$, $(D_n \mid X^k) = \det M$ où M est la matrice obtenue en remplaçant la dernière ligne de $D_n(X)$ par

$$\big((1 \mid X^k) \cdots (X^n \mid X^k)\big) = \big(C_k\, C_{k+1} \cdots C_{n+k}\big).$$

Le lecteur peu convaincu peut aussi écrire D_n en le développant par rapport à sa dernière ligne.

On constate donc que M possède deux lignes identiques et donc que $\boxed{(D_n \mid X^k) = 0}$.

Q 37. Le polynôme D_n est de degré n, est orthogonal à tous les X^k pour $k < n$. Il est donc proportionnel à U_n. De plus, son coefficient dominant est égal au déterminant extrait de D_n en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne (ceci se voit à nouveau en développant D_n par rapport à sa dernière ligne). Ce déterminant est égal à $H_{n-1} = 1$ d'après **Q35**. On en déduit que D_n comme U_n est unitaire et donc que $\boxed{D_n = U_n}$.

En développant $D_n(0)$ par rapport à la dernière ligne, on obtient

$$D_n(0) = (-1)^{n+1+1} H'_n = (-1)^n H'_n.$$

Mais d'après **Q29**, on a $D_n(0) = U_n(0) = (-1)^n$ si bien que l'on a $\boxed{H'_n = 1}$.