CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

**PC** **2021**

4 heures Calculatrice autorisée

Ce sujet est divisé en trois parties.

— Dans la première partie, on étudie une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui modélise la trajectoire d'une particule. On s'intéresse en particulier au temps nécessaire pour que la particule revienne pour la première fois à son point de départ, si cela arrive. Pour cela, on introduit une suite de nombres appelés nombres de Catalan et on étudie leurs propriétés.

— Dans la deuxième partie, entièrement indépendante de la première, on s'intéresse au calcul d'un déterminant à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

— Dans la troisième partie enfin, on utilise les résultats des deux premières parties pour calculer deux déterminants associés aux nombres de Catalan.

## I Étude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $\Omega$ et à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p, \quad \text{où } p \in \left]0, 1\right[.$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélise la trajectoire aléatoire dans $\mathbb{Z}$ d'une particule située en $S_0 = 0$ à l'instant initial $n = 0$, et faisant à chaque instant $n \in \mathbb{N}$ un saut de $+1$ avec une probabilité $p$ et de $-1$ avec une probabilité $1 - p$, les sauts étant indépendants et $p$ appartenant à $]0, 1[$.

Pour $\omega \in \Omega$, on représente la trajectoire de la particule par la ligne brisée joignant les points de coordonnées $(n, S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$.

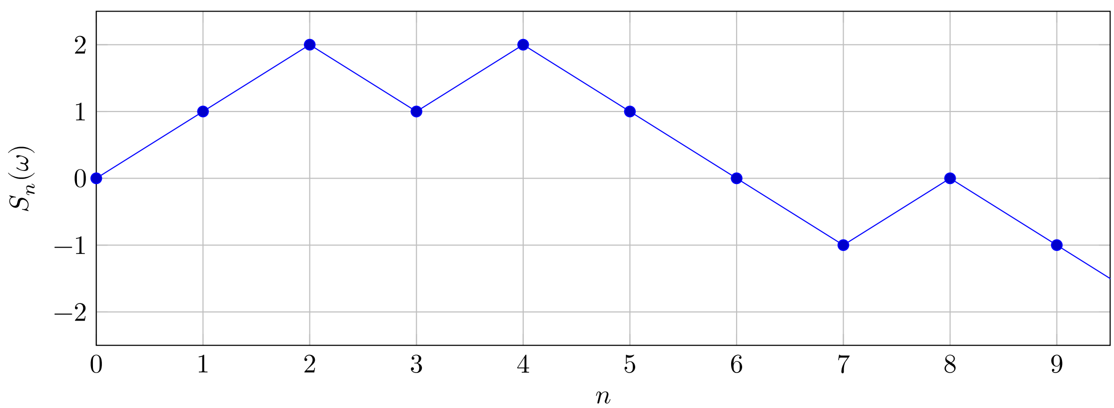


**Figure 1** Exemple de trajectoire possible

### *I.A – Espérance et variance de $S_n$*

Dans cette sous-partie, $n$ désigne un entier naturel non nul.

Soit $Y_n$ la variable aléatoire sur $\Omega$ égale au nombre de valeurs de $k \in [\![1, n]\!]$ telles que $X_k = 1$.

**Q 1.** Quelle est la loi de $Y_n$ ? En déduire l'espérance et la variance de $Y_n$.

**Q 2.** Quelle relation a-t-on entre $S_n$ et $Y_n$ ? En déduire l'espérance et la variance de $S_n$. Justifier que $S_n$ et $n$ ont même parité.

### *I.B – Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine*

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle chemin de longueur $m$ tout $m$-uplet $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ tel que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\gamma_i \in \{-1, 1\}$.

On pose alors $s_\gamma(0) = 0$ et, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $s_\gamma(k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \gamma_i$.

On représente le chemin $\gamma$ par la ligne brisée joignant la suite des points de coordonnées $(k, s_\gamma(k))$, $k \in [\![0, m]\!]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

— on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$ tout chemin $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$ de longueur $2n$ tel que $s_\gamma(2n) = 0$ et $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $s_\gamma(k) \geqslant 0$ ;

— on note $C_n$ le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

On convient de plus que $C_0 = 1$.

La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite des nombres de Catalan. On constate que $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$.

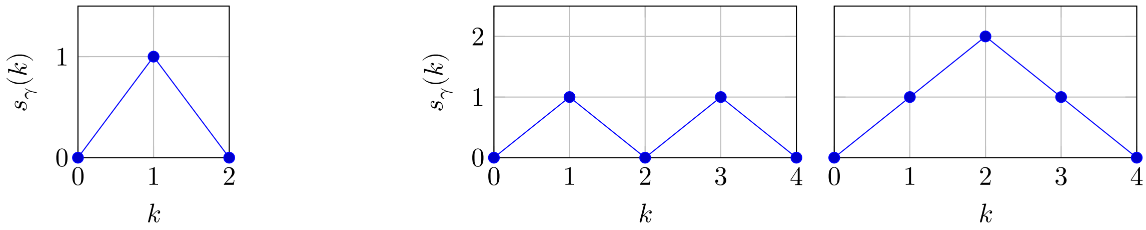


**Figure 2** Représentation des chemins de Dyck de longueurs 2 et 4

**Q 3.** Donner sans démonstration la valeur de $C_3$ et représenter tous les chemins de Dyck de longueur 6.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n + 2$. Soit $r = \max\{i \in [\![0, n]\!] \mid s_\gamma(2i) = 0\}$.

On suppose $0 < r < n$ et on considère les chemins $\alpha = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r})$ et $\beta = (\gamma_{2r+2}, \ldots, \gamma_{2n+1})$.

**Q 4.** Justifier à l'aide d'une figure que $\gamma_{2r+1} = 1$, $\gamma_{2n+2} = -1$ et que $\alpha$ et $\beta$ sont des chemins de Dyck.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ un chemin de longueur $m$.

Pour $t \in \mathbb{N}$, on note $A_{t,\gamma}$ l'événement : « pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $X_{t+k} = \gamma_k$ » ; en d'autres termes,

$$A_{t,\gamma} = \bigcap_{k=1}^{m} (X_{t+k} = \gamma_k).$$

**Q 5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$ un chemin de Dyck de longueur $2n$. Pour $t \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(A_{t,\gamma})$ en fonction de $n$ et $p$.

Soit $T$ la variable aléatoire, définie sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, égale au premier instant où la particule revient à l'origine, si cet instant existe, et égale à 0 si la particule ne revient jamais à l'origine :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*, S_k(\omega) \neq 0 \\ \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k(\omega) = 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Q 6.** Montrer que $T$ prend des valeurs paires et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T = 2n+2) = 2\, C_n\, p^{n+1}(1-p)^{n+1}$.

**I.B.1) Série génératrice des nombres de Catalan**

**Q 7.** En utilisant la question 4, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}.$$

**Q 8.** À l'aide de la variable aléatoire $T$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{C_n}{4^n}$ converge.

**Q 9.** En déduire que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} C_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

On pose alors, pour tout $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n \quad \text{et} \quad g(t) = 2tf(t).$$

On rappelle que la série génératrice de $T$, donnée par $G_T(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = n)t^n$, est définie si $t \in [-1, 1]$.

**Q 10.** À l'aide des questions précédentes, exprimer $G_T$ à l'aide de $g$ et de $\mathbb{P}(T = 0)$.

**Q 11.** En déduire que si $p \neq \dfrac{1}{2}$, alors $T$ admet une espérance.

**Q 12.** Montrer que $\forall t \in I$, $g(t)^2 = 2g(t) - 4t$.

**Q 13.** En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1 - 4t}.$$

**Q 14.** Montrer que $\varepsilon$ est continue sur $I \setminus \{\frac{1}{4}\}$. En déduire

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 - \sqrt{1-4t}.$$

**Q 15.** En déduire que $\mathbb{P}(T \neq 0) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$. Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.

**Q 16.** Montrer que si $p = \frac{1}{2}$, alors $T$ n'admet pas d'espérance.

### *I.C – Expression des nombres de Catalan et équivalent*

**Q 17.** Justifier l'existence d'une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1},$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_n$ à l'aide d'un coefficient binomial.

**Q 18.** En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

**Q 19.** Rappeler l'équivalent de Stirling. En déduire un équivalent de $C_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Q 20.** À partir de la question précédente, retrouver le résultat des questions 11 et 16.

# II Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $G_n$ la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G_n = \Big(\big(X^{i-1}\big|X^{j-1}\big)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (1|1) & (1|X) & \cdots & (1|X^n) \\ (X|1) & (X|X) & \cdots & (X|X^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X^n|1) & (X^n|X) & \cdots & (X^n|X^n) \end{pmatrix}$$

On cherche à obtenir une expression du déterminant de $G_n$ à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

### *II.A – Définition et propriétés d'un système orthogonal*

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on appelle système orthogonal toute suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

— $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow \big(P_i\big|P_j\big) = 0$ ;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est unitaire et de degré $n$.

Dans toute la partie II, on considère un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Q 21.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(V_0, V_1, ..., V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.

**Q 22.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P < n$. Montrer que $(V_n|P) = 0$.

**Q 23.** Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un autre système orthogonal. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n$.

### *II.B – Expression de* $\det G_n$ *à l'aide de la suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $G'_n$ la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G'_n = \Big(\big(V_{i-1}\big|V_{j-1}\big)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (V_0|V_0) & (V_0|V_1) & \cdots & (V_0|V_n) \\ (V_1|V_0) & (V_1|V_1) & \cdots & (V_1|V_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (V_n|V_0) & (V_n|V_1) & \cdots & (V_n|V_n) \end{pmatrix}$$

On note $Q_n = (q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ la matrice de la famille $(V_0, V_1, ..., V_n)$ dans la base $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Q 24.** Montrer que $Q_n$ est triangulaire supérieure et que $\det Q_n = 1$.

**Q 25.** Montrer que $Q_n^\top G_n Q_n = G'_n$, où $Q_n^\top$ est la transposée de la matrice $Q_n$.

**Q 26.** En déduire que $\det G_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} \|V_i\|^2$.

 

# III Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

Dans cette partie, on introduit un produit scalaire particulier sur $\mathbb{R}[X]$ et une suite de polynômes. On vérifie qu'il s'agit d'un système orthogonal pour ce produit scalaire, ce qui permettra d'appliquer les résultats de la partie précédente.

### *III.A – Produit scalaire*

**Q 27.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la fonction $x \mapsto P(4x)Q(4x)\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Dans toute la partie III, on pose

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X], \quad (P|Q) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

**Q 28.** Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

### *III.B – Système orthogonal*

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $U_0 = 1$, $U_1 = X - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = (X-2)U_{n+1} - U_n$.

**Q 29.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $U_n$ est unitaire de degré $n$, et déterminer la valeur de $U_n(0)$.

**Q 30.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(4\cos^2\theta)\sin\theta = \sin((2n+1)\theta)$.

**Q 31.** Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

**Q 32.** En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|U_n\| = 1$.
Pour calculer la valeur de $(U_m|U_n)$, on pourra effectuer le changement de variable $x = \cos^2\theta$.

### *III.C – Application*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = (X^n|1)$.

**Q 33.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4\mu_{n-1} - \mu_n = \frac{2\times 4^n}{\pi}\int_0^1 x^{n-3/2}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2n-1}\mu_n.$$

**Q 34.** En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = C_n$.

**Q 35.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des parties précédentes la valeur du déterminant

$$H_n = \det(C_{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & \iddots & \iddots & & \iddots & C_{2n-1} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} & C_{2n} \end{vmatrix}$$

### *III.D – Un autre déterminant de Hankel*

Dans cette sous-partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n(X) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad H'_n = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_2 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_3 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-3} \\ C_{n-1} & \iddots & \iddots & & \iddots & C_{2n-2} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-3} & C_{2n-2} & C_{2n-1} \end{vmatrix}$$

**Q 36.** Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$. Montrer $(D_n|X^k) = 0$.

**Q 37.** En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = U_n$, puis déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur du déterminant $H'_n$.

• • • FIN • • •