I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Q 1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathrm{U}) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^k(\mathrm{U})$ est linéaire.
Donc par composition et somme l'application Δ est linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathrm{U})$ vers $\mathcal{C}^0(\mathrm{U})$
or $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ est le noyau de cette application linéaire ainsi $\boxed{\mathcal{H}(\mathrm{U}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})}$

Q 2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U Ainsi toutes les dérivées partielles de f est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. En utilisant le théorèue de Schwarz et la linéarité de la dérivation, on a :

$$\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta f)$$

Comme f est harmonique et par dérivation de la fonction nulle, on a : $\forall x \in \mathrm{U},\ \Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) = 0$

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$. Puis on peut procéder par récurrence ; l'initialisation étant triviale et pour l'hérédité, on utilise ce qui précède en remarquant que :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1, \ldots, i_{k+1} \in [\![1, n]\!], \text{ on a : } \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}\right)$$

On a montré $\boxed{\text{toute dérivée partielle à tout ordre de } f \text{ appartient à } \mathcal{H}(\mathrm{U})}$

Q 3. **Analyse :** Soit $f \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ telle que $f^2 \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\dfrac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ et ainsi $\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2f \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$ d'où

$$\Delta(f^2) = 2f \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$$

Alors $\forall x \in \mathrm{U},\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2 = 0$

Comme il s'agit de sommes de réels positifs, on a $\forall x \in \mathrm{U},\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$

donc $\forall x \in \mathrm{U},\ \nabla f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ or U est un ouvert connexe par arcs

donc f est constante sur U

Synthhèse : On suppose que f est constante sur U alors f^2 également d'où

$$\forall x \in \mathrm{U},\ \Delta f(x) = 0 \ \text{ et } \ \Delta\left(f^2\right)(x) = 0$$

Ainsi f et f^2 sont harmoniques sur U

Conclusion : Si U est connexe par arcs,

$\boxed{\text{les fonctions } f \text{ de } \mathcal{H}(\mathrm{U}) \text{ telles que } f^2 \text{ appartienne aussi à } \mathcal{H}(\mathrm{U}) \text{ sont les fonctions constantes}}$

Q 4. Comme U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, ceci nous fournit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $r > 0$ tels que $\mathrm{D}(a, r) \subset \mathrm{U}$.
Ainsi pour tout $t \in]a_1 - r, a_1 + r[$ (ensemble infini), on a $(t, a_2, \ldots, a_n) \in \mathrm{U}$
ainsi $\boxed{\text{la fonction } \varphi : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U} \longmapsto x_1 \in \mathbb{R} \text{ est clairement harmonique sur U sans y être constante}}$
De plus $\forall x \in \mathrm{U},\ \Delta\left(\varphi^2\right)(x) = 2 \neq 0$ donc $\varphi^2 = \varphi \times \varphi$ n'est pas harmonique sur U
$\boxed{\text{Le produit de deux fonctions harmoniques n'est pas une fonction harmonique, en général}}$

II Exemples de fonctions harmoniques

II.A -

Q 5. *Remarque : on a f de classe $\mathcal{C}^2$ par produit car $(x,y) \longmapsto u(x)$ et $(x,y) \longmapsto v(y)$ le sont*

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 = \Delta f(x,y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y)$.

Comme v est non identiquement nulle, ceci nous fournit $t \in \mathbb{R}$ tel que $v(t) \neq 0$.

En posant $\lambda = \frac{v''(t)}{v(t)}$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $u''(x) + \lambda u(x) = 0$

donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 = \Delta f(x,y) = -\lambda u(x)v(y) + u(x)v''(y) = (v''(y) - \lambda v(y))\, u(x)$

En prenant $t' \in \mathbb{R}$ tel que $u(t') \neq 0$, on a $\forall y \in \mathbb{R}$, $0 = v''(y) - \lambda v(y)$ Ainsi

$\boxed{\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } u \text{ et } v \text{ soient solutions respectives des équations } z'' + \lambda z = 0 \text{ et } z'' - \lambda z = 0}$

Q 6. Je note les équations différentielles $\mathrm{E}_1 :\ z'' + \lambda z = 0$ et $\mathrm{E}_2 :\ z'' - \lambda z = 0$

Si $\lambda = 0$ Les solutions de E_1 (ou E_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{A}x + \mathrm{B}$ avec A et B $\in \mathbb{R}$

Si $\lambda > 0$ Les solutions de E_1 sont les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{A}\cos\left(t\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(t\sqrt{\lambda}\right)$ avec A et B $\in \mathbb{R}$

Les solutions de E_2 sont les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{A}'\,\mathrm{ch}\left(t\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}'\,\mathrm{sh}\left(t\sqrt{\lambda}\right)$ avec A' et B' $\in \mathbb{R}$

Si $\lambda < 0$ Les solutions de E_2 sont les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{A}\cos\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(t\sqrt{-\lambda}\right)$ avec A et B $\in \mathbb{R}$

Les solutions de E_1 sont les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{A}'\,\mathrm{ch}\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}'\,\mathrm{sh}\left(t\sqrt{-\lambda}\right)$ avec A' et B' $\in \mathbb{R}$

Réciproquement : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u et v solutions non nulles respectives de $\mathrm{E}_1 :\ z'' + \lambda z = 0$ et $\mathrm{E}_2 :\ z'' - \lambda z = 0$.

Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi $f : (x,y) \longmapsto u(x)v(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Et on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\Delta f(x,y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = \lambda u(x)v(y) - \lambda u(x)v(y) = 0$

donc f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$

Conclusion : Les équations différentielles étant linéaire homogène d'ordre 2 leur solutions forment un plan vectoriel.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Une fonction } f \text{ à variables séparables sur } \mathbb{R}^2 \text{ est harmonique non nulles si et seulement si} \\ \qquad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R},\ (\mathrm{A},\mathrm{B}) \text{ et } (\mathrm{A}',\mathrm{B}') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ tels que} \\ \begin{array}{llll} \text{si} & \lambda = 0 & \text{alors} & f : (x,y) \longmapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\,(\mathrm{A}'y + \mathrm{B}') \\ \text{si} & \lambda > 0 & \text{alors} & f : (x,y) \longmapsto \left(\mathrm{A}\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right)\left(\mathrm{A}'\,\mathrm{ch}\left(y\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}'\,\mathrm{sh}\left(y\sqrt{\lambda}\right)\right) \\ \text{si} & \lambda < 0 & \text{alors} & f : (x,y) \longmapsto \left(\mathrm{A}\,\mathrm{ch}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}\left(x\sqrt{-\lambda}\right)\right)\left(\mathrm{A}'\cos\left(y\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}'\sin\left(y\sqrt{-\lambda}\right)\right) \end{array} \end{array}}$$

II.B -

Q 7. Les fonctions $(r,\theta) \longmapsto r\cos(\theta)$ et $(r,\theta) \longmapsto r\sin(\theta)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par produits

donc la fonction $(r,\theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par composantes

de plus cette fonction est à valeurs dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ où f y est de classe $\mathcal{C}^2$

donc par composition $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}}$

Q 8. On utilise la formule de la chaîne dont l'écriture abusive est :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ainsi $\boxed{\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$

et $\boxed{\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$

Q 9. On continue à appliquer la formule de la chaîne avec une écriture abusive en servant du calcul ci-dessus : $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \sin(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$
puis à l'aide du théorème de Schwarz avec f de classe $\mathcal{C}^2$: on a

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$$

Puis
$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} - r\sin(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + r\cos(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$
puis à l'aide du théorème de Schwarz avec f de classe $\mathcal{C}^2$, on a :

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \\ r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r^2\sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\end{gathered}}$$

Q 10. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on a à l'aide des calculs précédents :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right)$$

On suppose que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$
avec ce qui précède :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0$$

Or pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en prenant $r = \sqrt{x^2+y^2}$,
on a $r > 0$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
et ainsi $\forall (x,y)\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \Delta f(x,y) = 0$ d'où $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$
La réciproque est immédiate. Ainsi on a bien :

$$\boxed{f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \text{ si et seulement si, pour tout } (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0}$$

Q 11. **Analyse :** On considère f une fonction harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On note g comme ci dessus.
On peut alors trouver h fonction définie sur $]0,+\infty[$ telle que $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ g(r,\theta) = h(r)$
Comme g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ alors h l'est sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = h'(r) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = h''(r)$$

La question précédente donne alors : $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ r^2h''(r) + rh'(r) = 0$
donc h' est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $tz' + z = 0$
Une solution évidente est $t \mapsto 1/t$ ce qui nous fournit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que $h' : r \longmapsto \mathrm{A}/r$
Ce qui nous fournit $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tel que $h : r \longmapsto \mathrm{A}\ln(r) + \mathrm{B}$
donc $g : (r,\theta) \longmapsto \mathrm{A}\ln(r) + \mathrm{B}$ puis $f : (x,y) \longmapsto \mathrm{A}\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + \mathrm{B}$

Synthèse : On suppose qu'il existe A et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tels que $f : (x,y) \longmapsto \mathrm{A}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{B}$
alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et radiale car
la fonction $g : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta) = 2\mathrm{A}\ln(r) + \mathrm{B}$ est indépendante de θ

et on vérifie facilement que $\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ r^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=0$
donc $f\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ d'après Q10.

$\boxed{\text{les fonctions harmoniques radiales de } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \text{ sont les fonctions : } (x,y)\longmapsto \mathrm{A}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{B} \text{ avec } \mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{R}}$

Q 12. En me servant de la question précédente, on cherche A et B $\in\mathbb{R}$ tels que $\begin{cases}2\mathrm{A}\ln(r_1)+\mathrm{B}=a\\ 2\mathrm{A}\ln(r_2)+\mathrm{B}=b\end{cases}$

On remarque que $\mathrm{A}=\dfrac{b-a}{2\left(\ln(r_2)-\ln(r_1)\right)}$ et $\mathrm{B}=\dfrac{\ln(r_2)a-\ln(r_1)b}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}$ conviennent
Alors d'après Q11, en prenant

$$\boxed{f:(x,y)\longmapsto\frac{(b-a)\ln(x^2+y^2)+2\ln(r_2)a-2\ln(r_1)b}{2\left(\ln(r_2)-\ln(r_1)\right)}\text{ sur }\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\text{ on a }\begin{cases}f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\mathbb{R})\\ \Delta f=0\\ f(x,y)=a\ \text{ si }\ \|(x,y)\|=r_1\\ f(x,y)=b\ \text{ si }\ \|(x,y)\|=r_2\end{cases}}$$

II.C -

Q 13. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Ceci nous fournit $r_0=\|(x_0+y_0)\|$ tel que $u(r_0)\neq 0$
Soit $\theta\in\mathbb{R}$ On a $u(r_0)v(\theta+2\pi)=f(r\cos(\theta+2\pi),r\sin(\theta+2\pi))=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=u(r_0)v(\theta)$
d'où $v(\theta+2\pi)=v(\theta)$
ainsi $\boxed{\text{si } f \text{ n'est pas identiquement nulle, alors } v \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$

Q 14. On suppose que f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,
On note g comme en II.B. Alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$ et

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)=u(r)v''(\theta)\ \text{ et }\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=u'(r)v(\theta)\ \text{ et }\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=u''(r)v(\theta)$$

En utilisant Q10 : on a $\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ r^2u''(r)v(\theta)+u(r)v''(\theta)+ru'(r)v(\theta)=0$
Comme f est non identiquement nulle, il existe $\theta_0\in\mathbb{R}$ tel que $v(\theta_0)\neq 0$. En prenant $\lambda=\dfrac{-v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$, alors

$\boxed{u \text{ est solution de l'équation différentielle (II.1) : } r^2z''(r)+rz'(r)-\lambda z(r)=0}$

On choisit $r_0>0$ tel que $u(r_0)\neq 0$, on a alors

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ v''(\theta)+\frac{r_0^2u''(r_0)+r_0u'(r_0)}{u(r_0)}v(\theta)=0$$

comme u est solution de l'équation différentielle (II.1), on a : $\dfrac{r_0^2u''(r_0)+r_0u'(r_0)}{u(r_0)}=\lambda$

ainsi $\boxed{v \text{ est solution de l'équation différentielle (II.2) : } z''(\theta)+\lambda z(\theta)=0}$

II.C.1) On suppose ici que $\lambda=0$.

Q 15. Les solutions de (II.2) sont les fonctions affines.

$\boxed{\text{Les solutions } 2\pi\text{-périodiques de (II.2) sont les fonctions constantes}}$

Q 16. En faisant comme en Q11. :

$\boxed{\text{Les solutions de (II.1) sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ sont les fonctions de la forme } r\longmapsto \mathrm{A}\ln(r)+\mathrm{B}}$

Q 17. D'après Q15. dans le cas où $\lambda=0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont radiales.
Il est clair que toutes fonctions radiale sur $\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$ est à variables polaires séparable. Alors d'après Q11.,

$\boxed{\text{les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont les fonctions : } (x,y)\longmapsto \mathrm{A}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{B} \text{ avec } \mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{R}}$

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. Analyse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}*$ tel qu'il existe v solution non nulles 2π-périodiques de (II.2) : $z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0$

Par l'absurde si $\lambda < 0$, comme en Q6 on peut écrire $v : \theta \longmapsto \mathrm{A}e^{\theta\sqrt{-\lambda}} + \mathrm{B}e^{-\theta\sqrt{-\lambda}}$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$

Si $\mathrm{A} \neq 0$, alors $\lim\limits_{\theta \to +\infty} |v(\theta)| = +\infty$

Si $\mathrm{A} = 0$, alors $\mathrm{B} \neq 0$ et $\lim\limits_{\theta \to -\infty} |v(\theta)| = +\infty$

Or $v(\mathbb{R}) = v([0, 2\pi])$ car v est 2π-périodique et d'après le théorème des bornes atteintes v est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$ car v y est continue

d'où v est bornée sur $\mathbb{R}$ ce qui est en contradiction avec les limites

d'où $\lambda > 0$

comme en Q6 on peut écrire $v : \theta \longmapsto \mathrm{A}\cos\left(\theta\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(\theta\sqrt{\lambda}\right)$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$

ainsi $v' : \theta \longmapsto -\mathrm{A}\sin\left(\theta\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\cos\left(\theta\sqrt{\lambda}\right)$

or on a $v(0) = v(2\pi)$ et $v'(0) = v'(2\pi)$ donc $\begin{cases} \mathrm{A}\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = \mathrm{A} \\ \mathrm{B}\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = \mathrm{B} \end{cases}$

d'où $\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right)) = 1$ car $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \neq (0, 0)$

ce qui nous fournit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi\sqrt{\lambda} = k2\pi$

donc $\lambda = k^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$

Synthèse : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prenons $\lambda = k^2$. Alors $\lambda > 0$ et $\sqrt{\lambda} = k$

Les solution de (II.2) sont les fonctions $\theta \longmapsto \mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta)$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$

Elles sont toutes $2\pi/k$ périodiques donc 2π périodiques

En prenant $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = (1, 0)$, on a une solution non nulle.

Conclusion :

$\boxed{\text{Pour que (II.2) admette des solutions } 2\pi\text{-périodiques non nulles , il faut et il suffit qu'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \lambda = k^2}$

Dans ce cas,

$\boxed{\text{les solutions non nulles } 2\pi\text{-périodiques de (II.2) sont les } \theta \longmapsto \mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta) \text{ avec } (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}}$

Q 19. Soit z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ On pose $\mathrm{Z} : t \longmapsto z\left(e^t\right)$.

Alors par composition Z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall r > 0,\ z(r) = \mathrm{Z}(\ln(r))$.

Réciproquement si Z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ alors $z : r \longmapsto \mathrm{Z}(\ln(r))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Pour $r > 0$, on a $z(r) = \mathrm{Z}(\ln(r))$ et $z'(r) = \dfrac{\mathrm{Z}'(\ln(r))}{r}$ et aussi $z''(r) = \dfrac{\mathrm{Z}''(\ln(r)) - \mathrm{Z}'(\ln(r))}{r^2}$

Ainsi $r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = \mathrm{Z}''(\ln(r)) - \lambda\mathrm{Z}(\ln(r))$

Comme ln est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$.

z est solution de (II.1) si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{Z}''(t) - \lambda\mathrm{Z}(t) = 0$

On a déjà vu cette équation en w : $w'' - \lambda w = 0$ (II.1b)

Grâce à la remarque sur la classe $\mathcal{C}^2$, en début de question, on a une bijection (qui à z associe Z)entre les ensembles des solutions de (II.1) et de (II.1b)

$\boxed{\text{Si } \lambda > 0, \text{ les solutions de (II.1), sont les fonctions } r \longmapsto \mathrm{A}\exp\left(\ln(r)\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\exp\left(-\ln(r)\sqrt{\lambda}\right) \text{ avec } (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2}$

$\boxed{\text{Si } \lambda < 0, \text{ les solutions de (II.1), sont les fonctions } r \longmapsto \mathrm{A}\cos\left(\ln(r)\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(-\ln(r)\sqrt{-\lambda}\right) \text{ avec } (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2}$

Q 20. Analyse : On suppose que f est harmonique à variables polaires séparables non identiquement nulles qui se prolongeant par continuité en 0. Alors d'après les questions précédentes, on peut trouver $k \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(\mathrm{A}', \mathrm{B}') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \big(\mathrm{A}'\exp(\ln(r)k) + \mathrm{B}'\exp(-\ln(r)k)\big) \times (\mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta))$$

Je note $v : \theta \longmapsto \mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta)$ donc $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \left(\mathrm{A}'r^k + \mathrm{B}'r^{-k}\right) v(\theta)$

Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v(\alpha) \neq 0$

Comme il existe $\ell \in \mathbb{R}$, tel que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$ alors $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \ell$

donc $r \longmapsto \mathrm{A}'r^k + \mathrm{B}'r^{-k}$ admet une limite finie en 0 donc $\mathrm{B}' = 0$

Synthèse On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^k(\mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta))$$

Remarque : j'ai rajouté la fonction nulle

Alors f est bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ à variables polaires séparables de plus f est alors de classe $\mathcal{C}^2$ d'après l'énoncé (II.C) car $u : r \mapsto r^k$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $v : \theta \longmapsto \mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta)$ est 2π-périodique et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

On définit g comme en II.B. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$:

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = k(k-1)g(r,\theta) \quad \text{et} \quad r\frac{\partial^2 g}{\partial r}(r,\theta) = kg(r,\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -k^2 g(r,\theta)$$

donc $r^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\dfrac{\partial^2 g}{\partial r}(r,\theta) = 0$ d'où f est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après Q10.

De plus $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leqslant (|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|)\, r^k$

donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leqslant (|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|)\,(x^2+y^2)^{k/2}$

or $(x^2+y^2)^{k/2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Ainsi f se prolonge par continuité en 0

Les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ à variables polaires séparables qui se prolongent par continuité en $(0,0)$ sont les fonctions f vérifiant

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^k(\mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta))$$

avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$

III Principe du maximum faible

III.A -

Q 21. Comme U est bornée, ceci nous fournit $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathrm{U} \subset \overline{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

donc comme $\overline{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$ est fermé alors $\overline{\mathrm{U}} \subset \overline{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

donc $\overline{\mathrm{U}}$ est borné et c'est un fermé de $\mathbb{R}^n$ qui est un espace de dimension finie

d'où $\overline{\mathrm{U}}$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ or f y est continue

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un maximum en un point } x_0 \in \overline{\mathrm{U}}}$

Q 22. Par l'absurde on suppose que $x_0 \notin \partial\mathrm{U}$ d'où $x_0 \in \overline{\mathrm{U}} \setminus \partial\mathrm{U}$

or $\partial\mathrm{U} = \overline{\mathrm{U}} \setminus \mathring{\mathrm{U}}$ où $\mathring{\mathrm{U}}$ est l'intérieur de U et $\mathring{\mathrm{U}} = \mathrm{U}$ car U est un ouvert

d'où $x_0 \in \mathrm{U}$ ce qui nous fournit $r > 0$ tel que $\mathrm{D}(x_0, r) \subset \mathrm{U}$

On a donc : $0 < \Delta f(x_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)$

Ce qui nous fournit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$

Comme f qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et y admet un maximum en x_0, on a $\nabla f(x_0) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$

Je note $\varphi : t \longmapsto f(x_0 + te_i)$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$

alors φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-r, r[$ par composition et on a $\varphi'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ et $\varphi''(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$

Donc selon Taylor-Young, on a $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{2}t^2 + (t^2)$

ceci nous fournit $\alpha \in]0, r[$, tel que $\forall t \in]-\alpha, \alpha[\,,\ \varphi(t) - \varphi(0) - \frac{\varphi''(0)}{4}t^2 \geqslant \frac{\varphi''(0)}{4}t^2$

donc $\forall t \in]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\},\ \varphi(t) \geqslant \varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{4}t^2 > \varphi(0)$

Absurde cas φ admet un maximum en 0 car f admet un maximum en x_0

Donc $\boxed{x_0 \in \partial \mathrm{U}}$

Comme $\partial\mathrm{U} \subset \overline{\mathrm{U}}$ donc $f(x_0) = \sup\limits_{y\in\overline{\mathrm{U}}} f(y) \geqslant \sup\limits_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)$ d'où

$$\forall x \in \mathrm{U},\ f(x) \leqslant \sup_{y\in\overline{\mathrm{U}}} f(y) = \sup_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)$$

À l'aide de ce qui est fait ci-dessus on a : $\forall x \in \mathrm{U},\ f(x) \neq \sup\limits_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)$ car $\mathrm{U} = \overline{\mathrm{U}} \setminus \partial\mathrm{U}$.

On en déduit que $\boxed{\forall x \in \mathrm{U},\ f(x) < \sup\limits_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)}$

III.B -

Q 23. La fonction $\psi : x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$

donc ψ est continue sur $\overline{\mathrm{U}}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U

De plus $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \Delta\psi(x) = 2n > 0$ Par somme et par linéarité de Δ, on a :

$\boxed{g_\varepsilon \text{ est continue sur } \overline{\mathrm{U}}, \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur U, et telle que } \forall x \in \mathrm{U},\ \Delta g_\varepsilon(x) > 0}$

Q 24. Soit $x \in \mathrm{U}$. Soit $\varepsilon > 0$. On utilise Q22 avec la fonction g_ε donc $g_\varepsilon(x) < \sup\limits_{y\in\partial\mathrm{U}} g_\varepsilon(y)$ (1)

Comme $\overline{\mathrm{U}}$ est bornée, il existe $\mathrm{R} > 0$, tel que $\forall y \in \overline{\mathrm{U}},\ 0 \leqslant \|y\| \leqslant \mathrm{R}$ donc

$$\forall y \in \overline{\mathrm{U}},\ g_\varepsilon(y) = f(y) + \|y\|^2\varepsilon \leqslant f(y) + \mathrm{R}^2\varepsilon \leqslant \sup_{z\in\partial\mathrm{U}} f(z) + \mathrm{R}^2\varepsilon$$

ainsi (1) devient :

$$f(x) \leqslant \sup_{z\in\partial\mathrm{U}} f(z) + \left(\mathrm{R}^2 - \|x\|^2\right)\varepsilon \leqslant \sup_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y) + \mathrm{R}^2\varepsilon$$

En passant à la limite quand ε tend vers 0 : on a $\boxed{\forall x \in \mathrm{U},\ f(x) \leqslant \sup\limits_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)}$

Q 25. On suppose que f_1 et f_2 sont égales sur $\partial\mathrm{U}$ alors $f = f_1 - f_2$, les hypothèses de Q24 et $\forall y \in \partial\mathrm{U},\ f(y) = 0$
donc $\forall x \in \mathrm{U},\ f_1(x) - f_2(x) = f(x) \leqslant 0 = \sup\limits_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)$

En faisant de même avec $f_2 - f_1$, on a $\forall x \in \mathrm{U},\ f_1(x) - f_2(x) \geqslant 0$ d'où $\forall x \in \mathrm{U},\ f_1(x) = f_2(x)$

$\boxed{\text{Si les fonctions } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont égales sur } \partial\mathrm{U}, \text{ alors } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont égales sur U}}$

IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

IV.A -

Q 26. On a pour tout $z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égale à R

Ainsi la fonction $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z < \mathrm{R}\}$

or la fonction $(x, y) \longmapsto x + iy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car linéaire en dimension finie

On a montré que, par composition,

si une fonction se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ où $\mathrm{R} > 0$ alors elle y est continue (1).

D'après le cours la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^{n-1}$ a également un rayon $\geqslant \mathrm{R}$

donc pour tout $r \in]0,\mathrm{R}[$, la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ converge normalement sur $\mathrm{D}(0,r)$ (2)

Soit $y \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$. Je note $u_n : x \mapsto a_n(x + \mathrm{i}y)^n$ définie sur $\mathrm{I}_y =]-\sqrt{\mathrm{R}-y^2}, \sqrt{\mathrm{R}-y^2}[$

de sorte que $\mathrm{I}_y \times \{y\} \subset \mathrm{D}(0,r)$

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_y.

De plus, $u_n' : x \mapsto n a_n (x + \mathrm{i}y)^{n-1}$ pour $n > 0$ et u_0' est la fonction nulle.

(ii) la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur I_y d'après l'énoncé

(iii) Soit $\rho \in]0, \sqrt{\mathrm{R}^2 - y^2}[$.

On a $\forall x \in [-\rho, \rho],\ |x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \sqrt{\rho^2 + y^2} < \mathrm{R}$. Je note $r = \sqrt{\rho^2 + y^2}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x \in [-\rho, \rho],\ |u_n'(x)| = |n a_n (x + \mathrm{i}y)^{n-1}| \leqslant n|a_n| r^n$ et $r \in [0,\mathrm{R}[$.

Ainsi d'après (2), la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement sur $[-\rho, \rho]$.

donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I_y

Par théorème avec (i), (ii) et (iii), on a $x \mapsto f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_y

Comme $\mathrm{D}(0,\mathrm{R}) = \bigcup_{z\in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[} (\mathrm{I}_z \times \{z\})$ la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + \mathrm{i}y)^{n-1}$ est définie sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

comme la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ a un rayon $\geqslant \mathrm{R}$

alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ d'après (1)

et de même $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)^{n-1}$ est continue sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$ et $\boxed{\text{ses dérivées partielles se développent en série entière sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$ par récurrence immédiate

Q 27. On travaille dans $\mathbb{C}$ plan vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

Soit $(x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. En appliquant les calculs de la question précédentes :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+\mathrm{i}y)^{n-1}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,y) = -\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+\mathrm{i}y)^{n-1}$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ En prenant parties réelles, et imaginaire, on a :

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta v(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

d'où $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont harmoniques sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

IV.B -

Q 28. On suppose f ne s'annule pas sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, alors $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. (1)

f se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

donc $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ d'après la propriété admise

or $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f^2(x,y)}$ et $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f^2(x,y)}$

ainsi $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial y}(x,y) = \mathrm{i}\dfrac{\partial(1/f)}{\partial x}(x,y)$ (2)

En utilisant la réciproque de la propriété admise : $\boxed{1/f \text{ se développe en série entière sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

Q 29. Soit $(x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

On a : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ selon la propriété admise.

En prenant partie réelle et imaginaire on a : $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$

De plus en utilisant la dérivation de produits, on a :

$$\Delta(uv)(x,y) = (v(x,y)\Delta u(x,y)) + (u(x,y)\Delta v(x,y)) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

donc comme u et v sont harmoniques sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et avec les formules ci-dessus :

$$\Delta(uv)(x,y) = 0 + 0 + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$$

Ainsi $\boxed{uv \text{ est harmonique sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

IV.C -

Q 30. Comme g est harmonique sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ alors g y est de classe $\mathcal{C}^2$.

Donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ (1)

Soit $(x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

On a $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) - \mathrm{i}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) - \mathrm{i}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)$

donc selon le théorème de Schwarz car g est de classe $\mathcal{C}^2$ et comme g est harmonique : on a

$$\mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \mathrm{i}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = -\mathrm{i}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \qquad (2)$$

En utilisant la propriété admise, (1) et (2) donne : $\boxed{h \text{ se développe en série entière sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

Q 31. On suppose que g appartient à $\mathcal{H}(\mathrm{D}(0,\mathrm{R}))$.

On définit la fonction h comme en Q30. et ainsi h se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

On peut donc trouver une suite complexe (b_n) telle que $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ h(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x+\mathrm{i}y)^n$

Ainsi la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ a un rayon $\geqslant \mathrm{R}$ donc il en est de même pour la série entière $g(0,0)+\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n+1} z^{n+1}$

Ainsi la fonction $\mathrm{H} : (x,y) \longmapsto g(0,0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n+1}(x+\mathrm{i}y)^{n+1}$ est définie sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

donc d'après Q26., H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} : (x,y) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x+\mathrm{i}y)^n = h(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} : (x,y) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \mathrm{i} (x+\mathrm{i}y)^n = \mathrm{i}h(x,y)$$

Ainsi $\frac{\partial\, \mathrm{Re}(\mathrm{H})}{\partial x} : (x,y) \longmapsto \mathrm{Re}(h)(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial\, \mathrm{Re}(\mathrm{H})}{\partial y} : (x,y) \longmapsto -\mathrm{Im}(h)(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$

donc la fonctions $g - \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ de différentielle nulle

or $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ est connexe par arcs donc $g - \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ est y est constante or $g - \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ est nulle en $(0,0)$

donc $g = \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et H y est développable en série entière.

$\boxed{\text{il existe bien une fonction H se développant en série entière sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \text{, telle que } g \text{ est la partie réelle de H}}$

IV.D -

Q 32. Comme f est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, ceci nous fournit une suite complexe (a_n) telle que $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+\mathrm{i}y)^n$.

Soit $r \in [0,\mathrm{R}[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : t \longmapsto a_n(r\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))^n = a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$

(i) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0,2\pi]$

(ii) Comme la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, on peut montrer comme en Q26., que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$

Ainsi par théorème on peut intervertir série et intégrale : $\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t$

or $\forall t \in [0,2\pi]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = f(r\cos(t), r\sin(t))$

et pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t = a_n r^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$

si $n = 0$, alors $\int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t = 2\pi a_0$

et sinon $\int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{n\mathrm{i}}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1-1}{n\mathrm{i}} = 0$

donc $\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\, \mathrm{d}t = 2\pi a_0$ or $f(0) = a_0$

ainsi $\boxed{\text{pour tout } r \in [0,\mathrm{R}[\text{, on a } f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\, \mathrm{d}t}$

Q 33. $\boxed{\text{Soit } g \text{ une fonction harmonique sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \text{ et } r \in [0,\mathrm{R}[\text{. On a } g(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t}$

on peut écrire $g = \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ où H est développable en série entière

alors d'après la question précédente, on a $\mathrm{H}(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{H}(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t$

On peut alors conclure en prenant la partie réelle de cette égalité.

Q 34. Soit $r \in [0,\mathrm{R}[$, on a $f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t$ d'après Q32.

La fonction $t \longmapsto f(r\cos(t), r\sin(t))$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ donc bornée selon le théorème des bornes atteintes

En utilisant l'inégalité de la moyenne (inégalité triangulaire continue), on a :

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\cos(t), r\sin(t))|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|\,\mathrm{d}t$$

donc $\boxed{\forall r \in [0,\mathrm{R}[,\ |f(0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|}$

Q 35. On utilise Q33. et on fait comme en Q34. pour obtenir :

$\boxed{\text{Soit } g \text{ une fonction harmonique sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \text{ et } r \in [0,\mathrm{R}[\text{. On a } |g(0,0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(r\cos(t), r\sin(t))|}$

Q 36. On suppose que $|f|$ admet un maximum en 0.

Si $f(0,0) = 0$ **alors** f est identiquement nulle et donc constante sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

Si $f(0,0) = 1$ **alors** $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ |f(x,y)| \leqslant 1$.

Je note u et v respectivement les parties réelle et imaginaire de f.

Ainsi $u(0,0) = 1$ et $v(0,0) = 0$

De plus $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ |u(x,y)| \leqslant |f(x,y)| \leqslant 1$ d'où $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ u(x,y) \leqslant 1$

D'après Q27., u et v sont harmoniques sus $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

donc selon Q33., pour $r \in [0,\mathrm{R}[$, on a $u(0) = 1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t$ donc

$\displaystyle\int_0^{2\pi} (1 - u(r\cos(t), r\sin(t)))\,\mathrm{d}t = 0$ et la fonction $t \longmapsto 1 - u(r\cos(t), r\sin(t))$ est continue et positive sur $[0, 2\pi]$

d'où $\forall r \in [0,\mathrm{R}[\ , \forall t \in [0, 2\pi],\ u(r\cos(t), r\sin(t)) = 1$

comme $\mathrm{D}(0,\mathrm{R}) = \{(r\cos(t), r\sin(t)) \mid r \in [0,\mathrm{R}[\ , t \in [0, 2\pi]\}$,

alors $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ u(x,y) = 1$ et $|u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)| \leqslant 1$

donc $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ v(x,y) = 0$ et ainsi $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ f(x,y) = 1$

Si $f(0,0) \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ **alors** je note $\tilde{f} = \dfrac{1}{f(0,0)} f$

De sorte que $\tilde{f}$ est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, $\tilde{f}(0,0) = 1$ et $|\tilde{f}|$ admet un maximum en 0

En utilisant le cas précédent, on a : $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ \tilde{f}(x,y) = 1$

et donc $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ f(x,y) = f(0,0)$

On a montré que $\boxed{\text{si } |f| \text{ admet un maximum en 0, alors } f \text{ est constante sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$

Q 37. Par l'absurde, on suppose que P est un polynôme complexe non constant sans racine dans $\mathbb{C}$.

Donc $\deg \mathrm{P} > 0$ et on peut écrire $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathrm{X}^i$ où $n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha_0, \dots \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$

Pour $z \neq 0$, on a $|\mathrm{P}(z)| \geqslant |\alpha_n| \cdot |z|^n \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \left|\dfrac{\alpha_i}{\alpha_n z^{n-i}}\right|\right)$ donc $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |\mathrm{P}(z)| = +\infty$

Ceci nous fournit $\rho > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant \rho \Longrightarrow |\mathrm{P}(z)| \geqslant |\mathrm{P}(0)|$

La fonction $z \longmapsto |\mathrm{P}(z)|$ est continue sur le compact $\overline{\mathrm{D}(0,\rho)}$

Ce qui nous fournit $z_0 \in \overline{\mathrm{D}(0,\rho)}$ tel que $\forall z \in \overline{\mathrm{D}(0,\rho)},\ |\mathrm{P}(z)| \geqslant |\mathrm{P}(z_0)|$

Ainsi $|\mathrm{P}(0)| \geqslant |\mathrm{P}(z_0)|$ et donc $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant \rho \Longrightarrow |\mathrm{P}(z)| \geqslant |\mathrm{P}(z_0)|$

Ainsi $z \longmapsto |\mathrm{P}(z)|$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$ atteint en z_0

Je pose $\mathrm{Q} = \mathrm{P}(\mathrm{X} + z_0)$ alors Q est un polynôme non constant qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ et $z \longmapsto |\mathrm{Q}(z)|$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$ atteint en 0

donc la fonction $(x, y) \longmapsto \mathrm{Q}(x + \mathrm{i}y)$ est une fonction non constante qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ telle que $(x, y) \longmapsto |\mathrm{Q}(x + \mathrm{i}y)|$ admet un minimum en $(0, 0)$

Prenons $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{Q}(x_1 + \mathrm{i}y_1) \neq \mathrm{Q}(0)$.

Je note alors $\mathrm{R} = \|(x_1, y_1)\| + 1$, de sorte que $(x, y) \longmapsto \mathrm{Q}(x + \mathrm{i}y)$ est une fonction non constante sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ et $(x, y) \longmapsto |\mathrm{Q}(x + \mathrm{i}y)|$ y admet un minimum en $(0, 0)$

de plus $(x, y) \longmapsto \mathrm{Q}(x + \mathrm{i}y)$ est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ car Q est un polynôme

Selon Q28., comme Q n'a pas de racine :

la fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{Q}(x + \mathrm{i}y)}$ est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$

De plus $|f|$ admet un maximum en 0, donc f est constante sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$

d'où $\mathrm{Q}(x_1 + \mathrm{i}y_1) = \dfrac{1}{f(x_1, y_1)} = \dfrac{1}{f(0, 0)} = \mathrm{Q}(0)$ Absurde

d'où $\boxed{\text{le théorème de D'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine}}$

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Q 38. Soit $|z| < 1$. On a $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} = \dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} = -1 + \dfrac{2}{1 - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}$ or $\left|z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right| < 1$

donc par somme géométrique : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} = -1 + 2\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z^k \mathrm{e}^{-k\mathrm{i}t}$

Ainsi $\boxed{\text{on a le développement en série entière pour } |z| < 1,\ \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-k\mathrm{i}t} z^k}$

Soit $|z| < 1$, je pose $\mathrm{F}(z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(t) \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z}\,\mathrm{d}t$

ce qui est possible car $t \longmapsto h(t) \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z}$ est continue sur $[0, 2\pi]$

La fonction h est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$ car h y est continue.

Ce qui nous fournit $\mathrm{M} > 0$ tel que $\forall t \in [0, 2\pi],\ |h(t)| \leqslant \mathrm{M}$

Je pose $u_0 = h$ et pour $n \geqslant 1$, $u_n : t \longmapsto 2\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}t} z^n h(t)$

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0, 2\pi]$

(ii) On a $\forall t \in [0, 2\pi]$, $|u_0(t)| \leqslant \mathrm{M}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, 2\pi],\ |u_n(t)| \leqslant 2\mathrm{M}|z|^n$$

or la série $\mathrm{M} + \sum\limits_{n \geqslant 1} 2\mathrm{M}|z|^n$ converge donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,2\pi]$

La somme de cette série de fonctions sur $[0,2\pi]$ est $t \longmapsto h(t)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}$

Avec (i) et (ii), par théorème de cours, on a

$$2\pi\mathrm{F}(z) = \int_0^{2\pi} h(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} h(t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}t}h(t)\mathrm{d}t\right)z^n$$

Ainsi F est la somme d'une série entière de rayon $\geqslant 1$

donc la fonction $(x,y) \longmapsto \mathrm{F}(x+\mathrm{i}y)$ est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0,1)$

or $g = \mathrm{Re}(\mathrm{F})$ donc d'après Q27, $\boxed{\text{la fonction } (x,y) \mapsto g(x+\mathrm{i}y) \text{ est une fonction harmonique sur } \mathrm{D}(0,1)}$

Q 39. Soit $|z| < 1$.

On applique le calcul précédent avec la fonction h constante égale à 1 qui est bien continue 2π-périodique :

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}t}\mathrm{d}t\right)z^n = 2\pi$$

car pour $k \in \mathbb{Z}^*$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{k\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{k\mathrm{i}t}}{k\mathrm{i}}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1-1}{k\mathrm{i}} = 0$

en en prenant la partie réelle : $\boxed{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t = 1}$

Q 40. Soit $|z| < 1$.

La fonction $t \longmapsto h(t)\mathcal{P}(t,z)$ est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$

La fonction $\psi : \alpha \mapsto \displaystyle\int_\alpha^{\alpha+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par le théorème fondamental de l'analyse de dérivée :

$$\psi' : \alpha \longmapsto h(\alpha+2\pi)\mathcal{P}(\alpha+2\pi,z) - h(\alpha)\mathcal{P}(\alpha,z) = 0$$

donc ψ est constante sur $\mathbb{R}$ d'où $\psi(0) = \psi(\varphi)$ ainsi $\boxed{g(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\varphi^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t}$

Q 41. Soit $r \in [0,1[$ et t et $\theta \in \mathbb{R}$. En notant $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ on a bien $|z| < 1$.

On a $\mathcal{P}(t,r\mathrm{e}^{i\theta}) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+r\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{i\theta}}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta})\right)}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{i\theta})\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta})}$

On a $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta}) = 1-r^2+r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 1-r^2+2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$

donc $\mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta})\right) = 1-r^2$

et $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta}\right) = 1+r^2-r\left(\exp(\mathrm{i}(\theta-t))+\exp(\mathrm{i}(t-\theta))\right) = 1+r^2-2r\cos(t-\theta)$

On a bien $\boxed{\mathcal{P}(t,r\mathrm{e}^{i\theta}) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}}$

Q 42. *On peut fire bien plus simple par majoration en utilisant la question Q41.*

Soit $\delta \in]0,\pi[$.

Je note pour $|z| < 1$, $\mathrm{F}_z : t \longmapsto \mathcal{P}(t,z)$ définie sur $[\delta, 2\pi-\delta]$.

(i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la fonction F_z est continue sur $[\delta, 2\pi-\delta]$

(ii) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$.

On se place sur $\{\mathrm{Z} \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\mathrm{Z}) > 0 \;\text{ et }\; |\mathrm{Z}| < 1\}$ qui est un voisinage de 1 relatif à $\{\mathrm{Z} \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Z}| < 1\}$

On note $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $r < 0$ et $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Quand $z \longrightarrow 1$, on a $\theta = \arccos\left(\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) \longrightarrow 0$ et $1 - r^2 \longrightarrow 0$

Pour $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$, on a $1 - 2r\cos(t-\theta) + r^2 \longrightarrow 2 - 2\cos(\delta)$ donc $\mathcal{P}(t,z) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} \longrightarrow 0$

donc la famille de fonctions $(\mathrm{F}_z)_z$ converge simplement sur $[\delta, 2\pi - \delta]$ vers la fonction $t \longmapsto 0$ quand z tend vers 1

(iii) la fonction $t \longmapsto 0$ est continue sur $[\delta, 2\pi - \delta]$

(iv) Je note $\mathrm{V}_\delta = \{\mathrm{Z} \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\mathrm{Z}) > \cos(\delta/2) \;\text{ et }\; |\mathrm{Z}| < 1\}$ qui est un voisinage de 1 relatif à $\{\mathrm{Z} \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Z}| < 1\}$

Soit $z \in \mathrm{V}_\delta$. Soit $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

On a $\mathrm{F}_z(t) = \mathcal{P}(t, r\mathrm{e}^{i\theta}) = \dfrac{1 - |z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z|^2}$ d'après le calcul fait en Q.43.

donc $|\mathrm{F}_z(t)| = \dfrac{1 - |z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z|^2}$ or $0 \leqslant 1 - |z|^2 \leqslant 1$ et $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z\right| \geqslant \mathrm{Re}\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z\right) \geqslant \cos(\delta/2) - \cos(\delta) > 0$

d'où l'hypothèse de domination :

$$\forall z \in \mathrm{V}_\delta,\ \forall t \in [\delta, 2\pi - \delta],\ |\mathrm{F}_z(t)| \leqslant \frac{1}{(\cos(\delta/2) - \cos(\delta))^2}$$

et $t \longmapsto \dfrac{1}{(\cos(\delta/2) - \cos(\delta))^2}$ est continue et intégrable sur le segment $[\delta, 2\pi - \delta]$

Conclusion : Avec (i), (ii), (ii) et (iv), l'extension du théorème de convergence dominée s'applique

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[z\to 1]{} 0$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathbb{R}$, on a par changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $u = t - \varphi$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$:

$\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t = \int_\delta^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(u+\varphi, z)\,\mathrm{d}u \int_\delta^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z\mathrm{e}^{-\,i\varphi})\,\mathrm{d}t$

Quand $z \longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, on a $z\mathrm{e}^{-\,i\varphi} \longrightarrow 1$

donc en utilisant la limite précédente par composition : $\boxed{\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[z\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}]{} 0}$

Q 43. Soit $\varepsilon > 0$. On considère $\delta > 0$.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

On a selon Q39., $2\pi = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t,z) = \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t$ en faisant comme en 40.

d'où $2\pi h(\varphi) = \displaystyle\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z) h(\varphi)\,\mathrm{d}t$

Ainsi $2\pi|g(z) - h(\varphi)| = \left|\displaystyle\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} (h(t)\mathcal{P}(t,z) - h(\varphi)\mathcal{P}(t,z))\,\mathrm{d}t\right|$ d'après Q40.

donc selon Chasles et l'inégalité triangulaire et comme $\mathcal{P}(t,z) \geqslant 0$ pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$2\pi|g(z) - h(\varphi)| \leqslant \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t) - h(\varphi)|\,\mathcal{P}(t,z)\mathrm{d}t + \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t,z)\,|h(t) - h(\varphi)|\,\mathrm{d}t$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique donc elle est uniformément continue sur le segment $[0,4\pi]$ selon le théorème de Heine. ce qui nous fournit $\delta \in]0,\pi/2]$ tel que

$$\forall t,t' \in [0,4\pi],\ |t-t'| \leqslant \delta \Longrightarrow \big|h(t)-h(t')\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

Ainsi ce δ que nous choisissons ne dépend que de ε, on a en plaçant t et t' dans le bon intervalle $[2k\pi,(2k+4)\pi]$:

$$\forall t,t' \in \mathbb{R},\ |t-t'| \leqslant \delta \Longrightarrow \big|h(t)-h(t')\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

on a donc $\forall t \in [\varphi-\delta,\varphi+\delta],\ |h(t)-h(\varphi)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\pi}$
et ainsi

$$0 \leqslant \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t,z)\,|h(t)-h(\varphi)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta}\mathcal{P}(t,z)\mathrm{d}t$$

or $0 \leqslant \displaystyle\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta}\mathcal{P}(t,z)\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varphi-\delta}^{\varphi-\delta+2\pi}\mathcal{P}(t,z)\mathrm{d}t \leqslant 2\pi$ d'après Q39.
et donc en choisissant ce δ, on a : pour tout nombre réel φ et tout nombre complexe z vérifiant $|z|<1$, on a bien

$$0 \leqslant \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t,z)\,|h(t)-h(\varphi)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z|<1$.
On a déjà vu que h est borné sur $[0,2\pi]$ or comme h est périodique $h([0,2\pi]) = h(\mathbb{R})$ donc h est bornée sur $\mathbb{R}$
Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|h(t)-h(\varphi)| \leqslant 2\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|h(t)|$
et donc $\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t)-h(\varphi)|\,\mathcal{P}(t,z)\mathrm{d}t \leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}|h(t)|\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta}\mathcal{P}(t,z)\ \mathrm{d}t$
Ainsi pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que, pour tout nombre réel φ
et tout nombre complexe z vérifiant $|z|<1$, $\boxed{|g(z)-h(\varphi)| \leqslant \dfrac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|h(t)|}{\pi}\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta}\mathcal{P}(t,z)\ \mathrm{d}t+\varepsilon}$

Q 44. On va établir l'existence et l'unicité.

Unicité Soit f_1 et f_2 deux solutions du problème de Dirichlet.
Je note $\mathrm{U} = \mathrm{D}(0,1)$ ainsi $\partial\mathrm{U} = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| = 1\big\}$
Les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur $\overline{\mathrm{U}}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U et égales sur ∂U car $\forall t\in\mathbb{R},\ f_1(\cos(t),\sin(t)) = h(t) = f_2(\cos(t),\sin(t))$
Ainsi Q25. s'applique et on a f_1 f_2 égale sur U donc sur $\overline{\mathrm{D}(0,1)}$

Existence : Je considère f définie sur $\overline{\mathrm{D}(0,1)}$ par :
pour $(x,y)\in\mathrm{D}(0,1)$, $f(x,y) = g(x+\mathrm{i}y)$ et pour $t\in\mathbb{R}$, $f(\cos(t),\sin(t)) = h(t)$
Selon Q38. f est $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur $\mathrm{D}(0,1)$, il reste à établir la continuité de f en tout point de $\partial\mathrm{D}(0,1)$
Soit $a\in\partial\mathrm{D}(0,1)$. On peut écrire $a = (\cos(\varphi),\sin(\varphi))$ avec $\varphi\in\mathbb{R}$
Soit $\varepsilon>0$.
Je prends $\delta>0$ comme à la question précédente.
On a quand $(x,y)\longrightarrow a$ avec $\|(x,y)\|<1$, $x+\mathrm{i}y \longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$
donc $|f(x,y)-f(a)| = |g(x+\mathrm{i}y)-h(\varphi)| \leqslant \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}}|h(t)|}{\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta}\mathcal{P}(t,z)\ \mathrm{d}t+\varepsilon$
or $\frac{\sup_{t\in\mathbb{R}}|h(t)|}{\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta}\mathcal{P}(t,z)\ \mathrm{d}t \longrightarrow 0$ d'après Q42.

ce qui nous fournit V_1 un voisinage de a, tel que $\forall(x,y) \in \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{D}(0,1),\ |f(x,y) - f(a)| \leqslant 2\varepsilon$
de plus l'application définie sur $\mathrm{D}(a,1) \cap \partial\mathrm{D}(0,1)$: $(\cos(t), \sin(t)) \mapsto t$ est continue en utilisant soit arccos soit arcsin
Ainsi la fonction f est continue en a sur $\partial\mathrm{D}(0,1)$ par composition avec h
ce qui bous fournit V_2 un voisinage de a relatif $\partial\mathrm{D}(0,1)$ tel que $\forall(x,y) \in \mathrm{V}_2,\ |f(x,y) - f(a)| \leqslant 2\varepsilon$
d'où $\forall(x,y) \in \mathrm{V}_2 \cup (\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{D}(0,1))\,,\ |f(x,y) - f(a)| \leqslant 2\varepsilon$
comme $\mathrm{V}_2 \cup (\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{D}(0,1))$ est un voisinage de a relatif à $\overline{\mathrm{D}(0,1)}$
On a bien la continuité voulue en a ce qui termine ce problème