ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

# Feuille de révisions n°3

## Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. Résoudre l'équation

$$\mathrm{X} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})\mathrm{A} = \mathrm{B} \tag{L}$$

d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$.

## Exercice 2 (**)

1. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}$ dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{A} < \deg \mathrm{B}$. On suppose B scindé à racines simples avec $\mathrm{B} = \lambda \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \alpha_i)$. Montrer

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{B}'(\alpha_i)(\mathrm{X} - \alpha_i)}$$

2. Soit $z_1, \ldots, z_n$ des complexes non nuls deux à deux distincts. On note $\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - z_k)$.

   Calculer $$\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k}{\mathrm{P}'(z_i)} \text{ pour } k \in [\![ 0\,;\, n-1 ]\!]$$

## Exercice 3 (***)

Pour $n$ entier non nul et $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 \left( \int_0^1 \ldots \left( \int_0^1 f\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \, \mathrm{d}x_1 \right) \, \mathrm{d}x_2 \ldots \right) \, \mathrm{d}x_n$$

1. Soit $r \geqslant 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{rx}$ pour $x \in [\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il existe $a \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(a)$$

2. Soit $f$ définie par $f(x) = \mathrm{P}(\mathrm{e}^x)$ pour $x \in [\,0\,;1\,]$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer

$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(a)$$

3. En déduire que pour $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(a)$$

## Exercice 4 (***)

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. On note S sa somme.
2. Déterminer de deux manière différentes $\lim_{x \to 1} \mathrm{S}(x)$.
3. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to 1$.

## Exercice 5 (***)

Soit $\alpha \in ]\,0\,;1\,[$. On pose

$$\mathrm{C}_\alpha = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(-\ln u)^\alpha} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On admet que la fonction $\Gamma$ est bien définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

1. Justifier que l'intégrale définissant $\mathrm{C}_\alpha$ est convergente et déterminer sa valeur en fonction de la fonction $\Gamma$.
2. Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est bien définie puis déterminer son comportement asymptotique.
3. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{I}_n$ pour $n \to +\infty$.

## Exercice 6 (*)

Résoudre sur $]\,0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle

$$t^2x'' + 4tx' + 2x = \ln(t)$$

avec le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$.

## Exercice 7 (***)

Soit $(u_n)_n$ suite à valeurs positives sous-additive, c'est-à-dire telle que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ pour $n \geqslant 1$. On suppose qu'on dispose de $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant a) > 0$.

1. Soient $m$ et $r$ des entiers. Établir
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_{km+r} \leqslant k u_m + u_r$$
2. Justifier que la borne inférieure $\mathrm{L} = \inf\left\{\dfrac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$ est bien définie.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $m$ entier non nul tel que
$$\mathrm{L} \leqslant \frac{u_m}{m} \leqslant \mathrm{L} + \varepsilon$$
puis établir
$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{L}$$
On pourra effectuer la division euclidienne de $n$ par $m$.
4. Établir pour $m$ et $n$ entiers non nuls
$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_m \geqslant na\right)\mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant ma) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)$$
puis en déduire $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)\mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant ma) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)$
5. Conclure que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\ln \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente.