ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille de révisions n°1

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé : L'application $\|\cdot\|_\infty$ étant une norme sur $\mathscr{B}([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$, il en découle sans difficulté que N est une norme. On a clairement $\|\cdot\|_\infty \leqslant \mathrm{N}$ mais $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas plus fine que N. Pour n entier, posant $f_n : t \mapsto t^n$, on trouve

$$\mathrm{N}(f_n) = 1 + n \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1$$

D'où
$$\frac{\mathrm{N}(f_n)}{\|f_n\|_\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Ainsi
$$\boxed{\text{Les normes N et} \|\cdot\|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

Exercice 2 (**)

Vérifier l'existence puis calculer
$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : On choisit une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ qui s'annule en 1, à savoir $t \mapsto 1 - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t-1}{t}$. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t-1}{t}$ et $t \mapsto \ln(1-t^2)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;1\,[$. On a

$$\left(\frac{t-1}{t}\right)\ln(1-t^2) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-(-t^2)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} t \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{t-1}{t}\right)\ln(1-t^2) = -\frac{(1-t^2)\ln(1-t^2)}{t(t+1)} \xrightarrow[t\to 1]{} 0$$

en utilisant la limite $u\ln(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Ainsi, le crochet $\left[\dfrac{t-1}{t}\ln(1-t^2)\right]$ admet des limites finies en 0 et 1. Par théorème, les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t-1}{t}\,\frac{-2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or on a

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t}\,\frac{-2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

qui est clairement convergente puisque l'intégrale est faussement impropre en 0 et 1. Par conséquent, on a l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t-1}{t}\ln(1-t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\ln(2)}$$

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$.

1. On suppose $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad |a_{i,i}| > \mathrm{R}_i \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}_i = \sum\limits_{j \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i\}} |a_{i,j}|$

   Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. Pour $(a, \mathrm{R}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$, on note $\mathrm{D}_f(a, \mathrm{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant \mathrm{R}\}$. Montrer

$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{D}_f(a_{i,i}, \mathrm{R}_i)$$

   Les ensembles $\mathrm{D}_f(a_{i,i}, \mathrm{R}_i)$ sont appelés *disques de Gerschgorin.*

Corrigé : 1. Une telle matrice est dite à *diagonale dominante stricte.* Supposons que $\mathrm{A} \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, autrement dit on dispose de $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \smallsetminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\}$ telle que $\mathrm{AX} = 0$. On note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec les $x_i \in \mathbb{K}$. Comme $\mathrm{X} \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, alors on dispose de $i_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que

$$|x_{i_0}| = \operatorname*{Max}_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} |x_i| > 0$$

Si ce maximum était nul, toutes les coordonnées de X seraient nulles ce qui contredirait l'hypothèse X non nulle. Par ailleurs, la i_0-ème ligne de AX est nulle donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0 \iff & \; a_{i_0,i_0} x_{i_0} + \sum_{j \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i_0\}} a_{i_0,j} x_j = 0 \\
\iff & \; |a_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{j \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i_0\}} a_{i_0,j} \frac{x_j}{|x_{i_0}|} \right|
\end{aligned}$$

la division par $|x_{i_0}|$ étant possible puisque le nombre est non nul. Par inégalité triangulaire et choix de $|x_{i_0}| = \operatorname*{Max}\limits_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} |x_i|$, il vient alors

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}| \underbrace{\left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right|}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{j \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ faite sur A. Ainsi

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{AX} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X} = 0$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$$

Remarque : Ce résultat est souvent référencé sous l'intitulé *lemme d'Hadamard.*

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. Par suite $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ d'où la négation du caractère à diagonale dominante stricte, *i.e.*

$$\exists i \in [\![1\,;\,n]\!] \quad | \quad |a_{i,i} - \lambda| \leqslant \mathrm{R}_i$$

Autrement dit
$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{D}_f(a_{i,i}, \mathrm{R}_i)}$$

On a localisé le spectre dans les disques dits de *Gershgorin.*

Exercice 4 (**)

Pour x réel, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que F est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.
   On admet l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$

avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{J} = [\,0\,;+\infty\,[$. On vérifie :

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$ avec $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur I.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve
$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

• Domination : On a
$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$$

avec $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$. Ainsi
$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale, on trouve
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} -\,t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Soit x réel. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}$ et $t \mapsto \sin(xt)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec
$$\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\sin(xt) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\sin(xt) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Le crochet étant fini, il vient par intégration par parties (convergence des intégrales concernées)
$$\mathrm{F}'(x) = \underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

D'où $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) + \frac{x}{2}\mathrm{F}(x) = 0}$$

3. On en déduit que $\mathrm{F} \in \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}})$ et sachant $\mathrm{F}(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on conclut
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}}$$

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, diagonalisables et tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation pour u et v.

Corrigé : On a $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, comme u et v commutent, alors $\mathrm{E}_\lambda(u)$ est stable par v. Notons v_λ l'endomorphisme induit par v sur $\mathrm{E}_\lambda(u)$. On a v_λ diagonalisable car induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable. Ainsi, on peut trouver $\mathscr{B}_\lambda$ une base de $\mathrm{E}_\lambda(u)$ qui soit base de diagonalisation de v_λ. Mais cette base est également constituée de vecteurs propres de u (associés à λ). Ainsi, en concaténant $\mathscr{B} = \biguplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathscr{B}_\lambda$, on obtient une base de diagonalisation simultanée de u et v et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe une base de diagonalisation pour } u \text{ et } v.}$$

Exercice 6 (*)

Déterminer
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

Corrigé : On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \left]\,0\,; +\infty\,\right[\qquad f_n(t) = \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[\,0\,;n\,]}(t)$$

On a
$$\forall t > 0 \qquad f_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln(t) \mathrm{e}^{-t}$$

et avec l'inégalité de concavité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u < 1$

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \left]\,0\,; +\infty\,\right[\qquad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = |\ln(t)|\,\mathrm{e}^{-t}$$

la majoration étant toujours valide pour $t > n$. La dominante φ est continue par morceaux sur $\left]\,0\,; +\infty\,\right[$ avec $\varphi(t) \underset{t \to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur $\left]\,0\,; +\infty\,\right[$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^{+\infty} \ln(t) \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 7 (**)

Soit X un ensemble et $\mathrm{E} = \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit L une forme linéaire sur E *positive*, c'est-à-dire

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad f \geqslant 0 \implies \mathrm{L}(f) \geqslant 0$$

1. Montrer $\qquad \forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad f \leqslant g \implies \mathrm{L}(f) \leqslant \mathrm{L}(g)$
2. En déduire que L est une application continue.
3. Montrer $\qquad \mathrm{L} \neq 0 \iff \mathrm{L}(1) \neq 0$
4. Établir $\qquad \forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{L}(fg)^2 \leqslant \mathrm{L}(f^2)\mathrm{L}(g^2)$

Corrigé : 1. Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$ avec $f \leqslant g$. On a $g - f \geqslant 0$ et par positivité de L, il vient

$$\mathrm{L}(g) - \mathrm{L}(f) = \mathrm{L}(g-f) \geqslant 0$$

Ainsi
$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{L}(f) \leqslant \mathrm{L}(g)}$$

2. Soit $f \in \mathrm{E}$. On a
$$-\|f\|_\infty \leqslant f \leqslant \|f\|_\infty$$

D'où
$$-\|f\|_\infty \mathrm{L}(1) = \mathrm{L}(-\|f\|_\infty) \leqslant \mathrm{L}(f) \leqslant \mathrm{L}(\|f\|_\infty) = \|f\|_\infty \mathrm{L}(1)$$

Ainsi
$$\boxed{\forall f \in \mathrm{E} \qquad |\mathrm{L}(f)| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{L}(1)}$$

d'où le caractère lipschitzien en zéro et donc la continuité de f.

3. Le sens indirect est immédiat et le sens direct vient par contraposition avec l'inégalité précédente. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{L} \neq 0 \iff \mathrm{L}(1) \neq 0}$$

4. Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \mathrm{L}((tf+g)^2) = t^2\mathrm{L}(f^2) + 2t\mathrm{L}(fg) + \mathrm{L}(g^2)$$

On a $(tf+g)^2 \geqslant 0$ pour tout t réel d'où la positivité de φ d'après la positivité de L. Si $\mathrm{L}(f^2) > 0$, la fonction φ est un trinôme à valeurs positives dont le discriminant ne peut être strictement positif. Ainsi, on a

$$\mathrm{L}(fg)^2 \leqslant \mathrm{L}(f^2)\mathrm{L}(g^2)$$

Si $\mathrm{L}(f^2) = 0$, la fonction $t \mapsto \varphi(t) = 2t\mathrm{L}(fg) + \mathrm{L}(g^2)$ est affine de signe constant positif ce qui n'est possible que si $\mathrm{L}(fg) = 0$ et l'inégalité est donc encore vraie. Finalement

$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{L}(fg)^2 \leqslant \mathrm{L}(f^2)\mathrm{L}(g^2)}$$

Remarque : Il s'agit exactement de la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ce qui était totalement prévisible puisque l'application $(f,g) \mapsto \mathrm{L}(fg)$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur E.

Exercice 8 (**)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul, $\mathscr{B}$ base orthonormée de E et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$.

1. Établir
$$|\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

2. Étudier le cas d'égalité.

Corrigé : 1. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, l'inégalité est vraie. Supposons $(x_1, \ldots, x_n)$ libre et soit $\mathscr{L} = (v_1, \ldots, v_n)$ la base orthonormée obtenue par l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à $(x_1, \ldots, x_n)$. On note $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\mathscr{L}$. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\mathscr{L} \times \mathrm{mat}_{\mathscr{L}}(x_1, \ldots, x_n)$$

La matrice P est matrice de passage entre deux bases orthonormées de E d'où $\mathrm{P} \in \mathcal{O}(n)$. Par suite

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det(\mathrm{P}) \det_{\mathscr{L}}(x_1, \ldots, x_n) = \pm \det_{\mathscr{L}}(x_1, \ldots, x_n)$$

et $$\mathrm{mat}_{\mathscr{L}}(x_1,\ldots,x_n) = \big(\langle x_j, v_i\rangle\big)_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$$

Or, on a $$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{Vect}\,(x_1,\ldots,x_k) = \mathrm{Vect}\,(v_1,\ldots,v_k)$$

d'où $$\forall j > i \qquad \langle x_j, v_i\rangle = 0$$

en le voyant soit par orthogonalité, soit parce que x_j est combinaison linéaire de $(v_1,\ldots,v_j)$ d'où la nullité des coefficients en v_i pour $i > j$. Ainsi

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{L}}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, v_1\rangle & \ldots & \ldots & \langle x_n, v_1\rangle \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \langle x_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

Ainsi $$|\det_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n)| = \prod_{k=1}^{n} |\langle x_k, v_k\rangle|$$

et $$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \|x_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x_k, v_i\rangle^2} \geqslant |\langle x_k, v_k\rangle|$$

Finalement $$\boxed{|\det_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|}$$

Remarque : Il s'agit de *l'inégalité d'Hadamard.*

2. Supposons $(x_1,\ldots,x_n)$ liée. L'inégalité est une égalité si et seulement si un des x_i est nul. Supposons ensuite $(x_1,\ldots,x_n)$ libre. L'inégalité est une égalité si et seulement

$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \|x_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x_k, v_i\rangle^2 = \langle x_k, v_k\rangle^2$$

c'est-à-dire $$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad x_k \in \mathrm{Vect}\,(v_k)$$

autrement dit $$(x_1,\ldots,x_n) \text{ famille orthogonale}$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'inégalité est une égalité si et seulement si } (x_1,\ldots,x_n) \text{ orthogonale ou l'un des } x_i \text{ est nul.}}$$

Exercice 9 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y indépendantes de loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,;\,n]\!])$ avec n entier non nul. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X})$ puis $\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X}\cap\mathrm{Y})$.

Corrigé : Les variables aléatoires X et Y sont finies donc Card X et Card Y également et admettent donc une espérance. On a clairement $(\mathrm{Card}\ \mathrm{X})(\Omega) = (\mathrm{Card}\ \mathrm{X}\cap\mathrm{Y})(\Omega) \subset [\![0\,;\,n]\!]$ et $\mathrm{Card}\ \mathcal{P}([\![1\,;\,n]\!]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ puisque choisir une partie équivaut à choisir une partie à k éléments pour $k \in [\![0\,;\,n]\!]$ et il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir une partie à k éléments. Puis, on trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X} = k)$$

et comme la variable X suit la loi uniforme

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \mathbb{P}(\text{Card X} = k) = \frac{\text{Card } \{\text{A} \subset [\![1\,;\, n]\!] \mid \text{Card A} = k\}}{2^n} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

autrement dit Card X $\sim \mathscr{B}(n, 1/2)$. On obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(\text{Card X}) = \frac{n}{2}}$$

Ensuite, il vient $$\mathbb{E}(\text{Card X} \cap \text{Y}) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(\text{Card X} \cap \text{Y} = k)$$

et comme les variables X et Y sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,;\, n]\!])$, alors le couple (X, Y) suit la loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,;\, n]\!])^2$ et on a

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \mathbb{P}(\text{Card X} \cap \text{Y} = k) = \frac{\text{Card } \{\text{A}, \text{B} \subset [\![1\,;\, n]\!] \mid \text{Card A} \cap \text{B} = k\}}{2^{2n}}$$

Reste donc évaluer ce numérateur qu'on note N. Compter les parties A, B dont l'intersection est de cardinal égal à k équivaut à choisir d'abord cette intersection avec $\binom{n}{k}$ choix possibles puis choisir les éléments de A hors de A $\cap$ B soit choisir $\ell \in [\![0\,;\, n-k]\!]$ éléments avec $\binom{n-k}{\ell}$ choix possibles et choisir les éléments de B qui ne sont pas dans A $\cap$ B soit choisir $p \in [\![0\,;\, n-(k+\ell)]\!]$ éléments avec $\binom{n-(k+\ell)}{p}$ choix possibles. Ainsi, on trouve

$$\text{N} = \sum_{\ell=0}^{n-k} \sum_{p=0}^{n-(k+\ell)} \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}\binom{n-(k+\ell)}{p} = \binom{n}{k}\sum_{\ell=0}^{n-k} 2^{n-(k+\ell)}\binom{n-k}{\ell}$$

On remarque la somme restante est un binôme de Newton développé d'où

$$\text{N} = \binom{n}{k}(1+2)^{n-k} = 3^{n-k}\binom{n}{k}$$

et donc $$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \mathbb{P}\left(\text{Card X} \cap \text{Y} = k\right) = \binom{k}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

c'est-à-dire Card X $\cap$ Y $\sim \mathscr{B}(n, 1/4)$ et on conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(\text{Card X} \cap \text{Y}) = \frac{n}{4}}$$

Exercice 10 (**)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \\ u_0 > 2 \end{cases}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.

Corrigé : On pose $f(x) = \sqrt{2+x}$ pour $x \geqslant 2$. La fonction f croît et on a

$$\forall x \geqslant 2 \qquad f(x) \leqslant x \iff 2 + x \leqslant x^2 \iff (x-2)(x+1) \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$$

Une récurrence immédiate donne $(u_n)_n$ minorée strictement par 2 et on a $(u_n)_n$ monotone et donc décroissante et par limite monotone, $(u_n)_n$ converge. La limite ℓ est point fixe de la fonction f continue sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et $f(x) = x \iff x = 2$ d'où

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2}$$

La série $\sum(u_n - 2)$ est à termes strictement positifs d'après l'étude précédente. La fonction f étant dérivable en 2, il vient

$$\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}=\frac{f(u_n)-f(2)}{u_n-2}\xrightarrow[n\to\infty]{} f'(2)=\frac{1}{4}<1$$

D'après le critère de d'Alembert, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum(u_n-2) \text{ converge.}}$$

Variante : L'approche la plus efficace consiste à observer que la fonction f est *contractante*. On a f dérivable sur $[\,2\,;+\infty\,[$ avec

$$\forall x \geqslant 2 \qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}\leqslant\frac{1}{4}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, il vient

$$\forall (x,y)\in [\,2\,;+\infty\,[^2 \qquad |f(x)-f(y)|\leqslant \frac{1}{4}\,|x-y|$$

d'où $$\forall n\in\mathbb{N} \qquad |u_{n+1}-2|\leqslant\frac{1}{4}\,|u_n-2|$$

Une récurrence immédiate donne

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad |u_n-2|\leqslant\frac{1}{4^n}\,|u_0-2|$$

On obtient simultanément la convergence de la suite $(u_n)_n$ et de la série $\sum(u_n-2)$.

Remarque : On pose $\qquad \forall n\in\mathbb{N} \qquad v_n=4^n(u_n-2)$

D'après le théorème de Taylor-Young, la fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[\,2\,;+\infty\,[$, on a pour n entier

$$u_{n+1}-2=f(u_n)-f(2)=f'(2)(u_n-2)+\frac{f''(2)}{2}(u_n-2)^2+\mathrm{o}((u_n-2)^2)$$

puis

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)&=\ln\left(4\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}\right)=\ln\left[4\left(f'(2)+\frac{f''(2)}{2}(u_n-2)+\mathrm{o}(u_n-2)\right)\right]\\&=\ln\left(1+2f''(2)(u_n-2)+\mathrm{o}(u_n-2)\right)=2f''(2)(u_n-2)+\mathrm{o}(u_n-2)\end{aligned}$$

Comme la série $\sum(u_n-2)$ converge, on en déduit la convergence de la série $\sum\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ et par conséquent la convergence de la suite $(\ln v_n)_n$ et donc celle de la suite $(v_n)_n$ vers une constante $\mathrm{C}>0$, autrement dit

$$\boxed{u_n-2\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{C}}{4^n} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{C}>0}$$

Déterminer la constante C semble une toute autre affaire ...

Exercice 11 (****)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ telle que

$$\forall (x,y)\in\mathrm{X}^2 \qquad \|f(x)-f(y)\|\geqslant\|x-y\|$$

1. Soit $a\in\mathrm{X}$. Montrer que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ définie par $u_0=a$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
2. Montrer que f est une isométrie, *i.e.*

$$\forall (x,y)\in\mathrm{X}^2 \qquad \|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$$

3. Montrer que f est une bijection de X sur X.

Corrigé : 1. Par récurrence immédiate, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|x-y\| \leqslant \|f^k(x) - f^k(y)\|$$

d'où $$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \|u_n - u_0\| \leqslant \|f^k(u_n) - f^k(u_0)\| = \|u_{n+k} - u_k\|$$

La suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans X compact donc il existe φ une extractrice telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ converge dans X. On définit ψ sur $\mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi(n+1) = \min\{\varphi(k),\ k > 2\psi(n)\}$$

D'après le résultat préliminaire, pour n entier

$$\|u_{\psi(n+1)-\psi(n)} - u_0\| \leqslant \|u_{\psi(n+1)} - u_{\psi(n)}\|$$

Il s'ensuit $$u_{\psi(n+1)-\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Enfin, par construction, on a $\psi(n+1) > 2\psi(n)$ pour n entier d'où

$$\psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) > \psi(n) \leqslant 0$$

ce qui prouve la stricte croissance de $\left(\psi(n+1) - \psi(n)\right)_n$ qui est donc une extractrice. Ainsi

$$\boxed{\text{La valeur } a \text{ est valeur d'adhérence de } (u_n)_n.}$$

Remarque : L'extractrice $\psi(\cdot + 1) - \psi$ est complètement déterminée par le choix de φ.

2. Soit $(a,b) \in \mathrm{X}^2$. On construit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ comme précédemment. L'espace X^2 est compact comme produit d'espaces compacts. Ainsi, la suite $(u_n, v_n)_n$ admet une valeur d'adhérence et avec le même procédé que celui vu précédemment, on construit une extractrice χ telle que

$$u_{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \text{et} \quad v_{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$$

Par ailleurs, comme $\chi(n) \geqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, il vient

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \|f(a) - f(b)\| \leqslant \|f^{\chi(n)-1}(f(a)) - f^{\chi(n)}(f(b))\| = \|u_{\chi(n)} - v_{\chi(n)}\|$$

Faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $\|f(a) - f(b)\| \leqslant \|a-b\|$ et l'autre inégalité est vraie par hypothèse. Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est une isométrie.}}$$

3. Comme f est une isométrie, elle est injective et continue. Comme X est compact, l'ensemble $f(\mathrm{X})$ est compact. D'après le résultat de la première question, on a $\mathrm{X} \subset \overline{f(\mathrm{X})}$ et comme $f(\mathrm{X})$ est compact donc fermé, il s'ensuit que $\mathrm{X} \subset f(\mathrm{X}) = \overline{f(\mathrm{X})}$. L'autre inclusion étant vraie par hypothèse, on a $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est une bijection de X sur X.}}$$