ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 15/03/25

Commentaires - Devoir surveillé n°6

Le sujet traite des fonctions harmoniques et du problème de Dirichlet. Les thèmes abordés sont essentiellement :

- calcul différentiel ;
- équations différentielles ;
- séries de fonctions et intégration terme à terme ;
- un zest de topologie.

La progression est graduelle avec, dans les parties I et II, de nombreuses questions calculatoires (Laplacien en polaires) ou relevant directement du cours (solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants). De très nombreux points ont été perdus par ceux qui ne spécialisent pas les notations des variables qu'ils fixent. Par exemple, pour traduire $x \in \mathbb{R} \mapsto u(x)$ non identiquement nulle, il était quasiment indispensable de rédiger : « On dispose de x_0 réel tel que $u(x_0) \neq 0$. » Très rares sont ceux qui ont eu des points sans opter pour ce mode de rédaction. Ce procédé de rédaction propre et précis suggéré de très nombreuses fois tout au long de l'année était requis pour les questions 5, 13 et 14. Certains ont perdu systématiquement les points de ces questions en prétendant fixer x et y réels et faisant ensuite comme si x et y étaient quelconques. La partie III est un problème classique mais non trivial. Le début de la partie IV était particulièrement difficile, il ne fallait pas hésiter à sauter les questions 26 et 31. Certaines questions de la partie V étaient très abordables et indépendantes du reste.

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Q1. Ne pas omettre de dire que la fonction nulle est dans $\mathcal{H}(\mathrm{U})$.

Q2. Peu ont traité le cas général, à savoir une dérivée partielle quelconque : $\partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_k}f$.

Q3. Il faut rédiger un peu ! Pour passer d'une somme de termes nulle à la nullité des termes, invoquer la positivité des termes concernés s'impose. Peu invoquent la connexité par arcs de U pour caractériser les fonctions constantes.

Q4. De nombreuses confusions : beaucoup ont considéré des applications de la forme $x \mapsto x$ ce qui n'a aucun sens de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ avec n potentiellement différent de 1. Pour le produit de deux fonctions harmoniques, il faut exhiber un contre-exemple ou exploiter le résultat de la question précédente.

II Exemples de fonctions harmoniques

Q5. Il faut impérativement spécialiser des variables : x_0 réel tel que $u(x_0) \neq 0$ et y_0 réel tel que $v(y_0) \neq 0$. Question très simple mais qui a été peu réussie.

Q6. Question de cours ! Attention au cas $\lambda < 0$ qui fait intervenir $\sqrt{-\lambda}$ dans les solutions. Le cas $\lambda = 0$ est à traiter à part.

Q7. Il faut détailler un peu la composition et préciser que les fonctions coordonnées sont de classe $\mathscr{C}^2$.

Q8. OK.

Q9. Beaucoup d'erreurs : il y a des dérivées croisées qui apparaissent et il faut les regrouper en invoquant le théorème de Schwarz.

Q10. OK.

Q11. Certains échouent à résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 !

Q12. Bien réussie par ceux qui ont la bonne forme de solutions.

Q13. Même remarque que pour la question 5.

Q14. Idem.

Q15. Il faut rédiger ! Pas d'affirmation gratuite en devoir.

Q16. Même remarque que pour la question 11.

Q17. Idem.

Q18. Très peu de bonnes choses. À reprendre à tête reposée.

Q19. Peu traitée mais sans difficulté réelle.

Q20. Idem.

III Principe du maximum faible

Q21. Beaucoup affirment que U borné implique $\bar{\mathrm{U}}$ borné mais quasiment personne ne prouve cette affirmation indispensable pour la suite.

Q22. Situation contrastée : question très bien réussie par certains et complètement sabotée par d'autres ...

Q23. La continuité de $\|\cdot\|$ et/ou le caractère $\mathscr{C}^2$ de $\|\cdot\|^2$ doivent être justifiés ! On lit beaucoup d'aberrations ... Le laplacien du carré de la norme est à calculer en détail.

Q24. Le caractère borné de $x \mapsto \|x\|^2$ sur $\partial\mathrm{U}$ mérite un détail.

Q25. Bien fait quand c'est traité.

IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

Q26. Très peu ont compris ce qui était attendu. Il fallait travailler à y fixé (puis x fixé), établir la régularité $\mathscr{C}^1$ en une variable de la série de fonctions concernées puis montrer la continuité en les deux variables de la dérivée partielle (procédé déjà vu lors de l'intégrale à paramètre pour le prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ d'une fonction taux d'accroissement).

Q27. Peu traitée.

Q28. Plutôt bien.

Q29. Plutôt bien.

Q30. Plutôt bien.

Q31. Très difficile, très peu abordé.

Q32. Des confusions : il ne s'agit pas d'intégration de série entière mais d'une série de fonctions en la variable t. Il fallait justifier la permutation des symboles avec, par exemple, de la convergence normale.

Q33. Peu traitée.

Q34. Plutôt bien.

Q35. Peu traitée.

Q36. Essentiellement des arnaques.

Q37. Très peu abordée.

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Q38. Question abordable, certains l'ont vu.

Q39. Traitée dans une unique copie.

Q40. Question simple, très peu traitée.

Q41. Idem.

Plus personne ensuite ...