ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille de révisions n°4

Exercice 1 (*)

Déterminer l'espace tangent à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Exercice 2 (**)

Soit A matrice compagne de $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suite récurrente linéaire d'ordre $p \geqslant 2$. Résoudre $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ avec $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x_0 & \dots x_{p-1} \end{pmatrix}$ non nulle. En déduire la forme des sous-espaces propres de A et une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A.

Exercice 3 (***)

Pour $x > -1$, on pose
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 4 (****)

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Déterminer les éléments propres de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (**)

Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et f sa somme.

1. Montrer $\quad \forall r \in [\,0\,;\mathrm{R}\,[\qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \,\mathrm{d}\theta$
2. Que peut-on dire de f si $|f|$ admet un maximum local en zéro ?

Exercice 6 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer le théorème de Cauchy linéaire pour le problème de Cauchy
$$\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

Exercice 7 (**)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ diagonalisable. Déterminer la forme des solutions de l'équation $X' = AX$.
2. Soient $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des scalaires et A la matrice compagne associée à l'équation différentielle scalaire linéaire d'ordre p

$$x^{(p)} + a_{p-1}x^{(p-1)} + \ldots + a_0 x = 0 \tag{H}$$

Établir que la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle admet p valeurs propres distinctes.

Exercice 8 (***)

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in]\,0\,;1\,[$. On note $M_n = \operatorname{Max}(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer un équivalent simple de $\mathbb{E}(M_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9 (**)

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \in E \mapsto \det(M)$.

1. Montrer que f est différentiable et préciser sa différentielle.
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des solutions respectives des problèmes de Cauchy

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \begin{cases} X' = A(t)X \\ X(0) = x_i \end{cases}$$

avec $A \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, E)$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad W(t) = \det(X_1(t)|\ldots|X_n(t))$$

   (a) Montrer que W est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
   (b) En déduire une expression intégrale de $W(t)$ pour t réel.
   (c) Si la fonction A est constante, déterminer une expression simple de $\det e^{tA}$ pour t réel.

Exercice 10 (***)

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.
3. Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.
4. Montrer que si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 (***)

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels deux à deux distincts. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x - a_n|}{2^n\,(1 + |a_n|)}$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F n'est dérivable en aucun point a_n avec n entier.