ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille de révisions n°5

Exercice 1 (***)

Vérifier l'existence puis calculer

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$$

Exercice 2 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E.

1. Déterminer $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}$.
2. En déduire $(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^{\perp}$.
3. On suppose $\mathrm{F}^{\perp} \perp \mathrm{G}^{\perp}$. Montrer

$$p_{\mathrm{F}} + p_{\mathrm{G}} - p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}} = \mathrm{id} \quad \text{ et } \quad p_{\mathrm{F}} \circ p_{\mathrm{G}} = p_{\mathrm{G}} \circ p_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}$$

Exercice 3 (***)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n\ln n}$$

1. Justifier que f est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour $x \to +\infty$.

Exercice 4 (***)

Soit $(\mathrm{G},\times)$ une groupe fini non commutatif et $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé avec X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{U}_{\mathrm{G}}$. On définit le centre de $(\mathrm{G},\times)$ noté $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ par

$$\mathrm{Z}(\mathrm{G}) = \{x \in \mathrm{G} \mid \forall g \in \mathrm{G} \quad xg = gx\}$$

et pour $x \in \mathrm{G}$, on définit son centralisateur C_x par

$$\mathrm{C}_x = \{g \in \mathrm{G} \mid gx = xg\}$$

1. Soit $x \in \mathrm{G}$. Montrer que $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ et C_x sont des sous-groupes de $(\mathrm{G},\times)$ avec $x \in \mathrm{C}_x$ et $\mathrm{Z}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{C}_x$.
2. Établir

$$\mathbb{P}(\mathrm{XY}=\mathrm{YX}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|^2}\left(|\mathrm{G}|\,|\mathrm{Z}(\mathrm{G})| + \sum_{x\in\mathrm{G}\smallsetminus\mathrm{Z}(\mathrm{G})} |\mathrm{C}_x|\right)$$

3. En déduire $$\mathbb{P}(\mathrm{XY}=\mathrm{YX}) \leqslant \frac{5}{8}$$

Exercice 5 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit le *rayon spectral* d'une matrice noté ρ par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \rho(\mathrm{A}) = \operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} |\lambda|$$

1. Montrer
$$\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \iff \rho(\mathrm{A}) < 1$$
et
$$\rho(\mathrm{A}) > 1 \implies \|\mathrm{A}^k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$
On pourra considérer la norme $\|\cdot\|_1$ pour certaines étapes de calcul.
2. Établir
$$\lim_{k\to+\infty} \|\mathrm{A}^k\|^{1/k} = \rho(\mathrm{A})$$

Exercice 6 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle discrète et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier. On suppose qu'il existe $\tau > 0$ tel que $\mathrm{e}^{\tau|\mathrm{X}|}$ est d'espérance finie. On note $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\varphi : t \mapsto \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$ est définie sur I un intervalle contenant $[-\tau\,;\tau]$.
2. Établir que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\tau\,;\tau[$.
3. Montrer
$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant \exp\left(n\chi(t)\right) \quad \text{avec} \quad \chi(t) = \ln\varphi(t) - ta$$
On suppose désormais $a > \mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a) > 0$.
4. Justifier que χ est minorée sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$.
On note $\eta_a = \operatorname*{Inf}_{t \in \mathrm{I}\cap\mathbb{R}_+} \chi(t)$.
5. Préciser un équivalent de $\chi(t)$ lorsque $t \to 0$. En déduire $\eta_a < 0$.
6. Conclure qu'il existe $r \in [0\,;1[$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant r^n$$

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On note

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{N}_k = \operatorname{Ker} f^k \qquad \mathrm{I}_k = \operatorname{Im} f^k \qquad d_k = \dim \mathrm{N}_{k+1} - \dim \mathrm{N}_k$$

1. Montrer que les suites $(\mathrm{I}_k)_k$ et $(\mathrm{N}_k)_k$ sont respectivement décroissante et croissante et qu'elles sont simultanément stationnaires.
2. On note r le rang à partir duquel les suites stationnent. Montrer $\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{N}_r$.
3. En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{N} \end{array}\right)$ où C une matrice carrée inversible et N est une matrice carré nilpotente.
4. Montrer la décroissance de $(d_k)_k$.