ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille de révisions n°2

Exercice 1 (*)

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E euclidien. Montrer

$$u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff u \text{ symétrie orthogonale}$$

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{E}$. Si $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{O}(\mathrm{E})$, on a

$$u = u^* \quad \text{et} \quad u^* = u^{-1}$$

d'où $u^2 = \mathrm{id}$ et u isométrie. C'est donc une symétrique orthogonale. Réciproquement , si u est une symétrie orthogonale, alors c'est une isométrie et comme $u^2 = \mathrm{id}$, alors $u^{-1} = u$ et $u^{-1} = u^*$ car $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ d'où $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On conclut

$$\boxed{u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff u \text{ symétrie orthogonale}}$$

Variantes : (1) Si on ne pense pas à utiliser l'adjoint, on peut procéder ainsi : pour $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{O}(\mathrm{E})$, on a

$$\|u^2(x) - x\|^2 = \|u^2(x)\|^2 - 2\langle u^2(x), x\rangle + \|x\| = 2\|x\|^2 - 2\langle u(x), u(x)\rangle = 0$$

d'où $u^2 = \mathrm{id}$ et u isométrie donc c'est une symétrique orthogonale. Réciproquement , si u est une symétrie orthogonale, alors c'est une isométrie et pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$

$$\langle u(x), y\rangle \underbrace{=}_{u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})} \langle u^2(x), u(y)\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

(2) Pour le sens direct, soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. On a $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, la matrice A est ortho-diagonalisable et comme elle est orthogonale, son spectre est inclus dans $\{-1, 1\}$. Il s'agit donc d'une matrice de symétrie qui est une isométrie d'où le résultat. Réciproguement, on considère une base $\mathscr{B}$ orthonormée adaptée à la symétrie s. On a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} s = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_s, -\mathrm{I}_r)$ matrice symétrique réelle et clairement orthogonale d'où le résultat.

Exercice 2 (***)

1. Justifier l'existence de $$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$
2. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathrm{I}$ puis en déduire la valeur de I.

Corrigé : 1. On pose $f(t) = \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ pour $t \in \,]\,0\,;1\,[$. On a $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,[\,, \mathbb{R})$ puis

$$f(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{t-1}{\ln(t)} \underset{t \to 1}{\sim} \frac{t-1}{t-1} \xrightarrow[t \to 1]{} 1$$

Ainsi, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et 1 et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Avec le changement de variables $u = -\ln(t)$, les intégrales étant de même nature donc convergentes et par conséquent égales, on obtient

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Soit $x > 0$. En remarquant $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-2u}}{u} \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$, on a par linéarité de l'intégrale car convergence

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Avec le changement de variables $v = 2u$ dans la deuxième intégrale puis la relation de Chasles, on obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{2x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v}\,\mathrm{d}v = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Par décroissance de $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$, on obtient

$$\mathrm{e}^{-2x}\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

Par encadrement, on conclut $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(2)}$

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $\mathrm{A} \subset \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on note

$$\mathcal{C}(\mathrm{A}) = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \ :\ \forall v \in \mathrm{A} \quad u \circ v = v \circ u\}$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier le *bicommutant* $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre contenant $\mathbb{K}[f]$.
2. Soient A, B incluses dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies \mathcal{C}(\mathrm{B}) \subset \mathcal{C}(\mathrm{A})$$

3. On suppose f *cyclique*, c'est-à-dire il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

   (a) Établir $\qquad \mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]$

   (b) En déduire $\qquad \mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$

Corrigé : 1. On a clairement $\mathrm{id} \in \mathcal{B}(f)$. Soient $(\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times \mathcal{B}(f)^2$ et soit $w \in \mathcal{C}(\{f\})$. On a

$$u \circ w = w \circ u \quad \text{et} \quad v \circ w = w \circ v$$

d'où $$(\lambda u + v) \circ w = w \circ (\lambda u + v)$$

et $$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w) = u \circ (w \circ v) = (u \circ w) \circ v = (w \circ u) \circ v = w \circ (u \circ v)$$

ce qui prouve que $\mathcal{B}(f)$ est sous-algèbre de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $u \in \mathcal{B}(f)$, on a $u \circ f = f \circ u$ puisque $f \in \mathcal{C}(\{f\})$ d'où $f \in \mathcal{B}(f)$. Du fait de la structure d'algèbre de $\mathcal{B}(f)$, on vérifie par récurrence $f^k \in \mathcal{B}(f)$ pour k entier puis $\mathrm{P}(f) \in \mathcal{B}(f)$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On conclut

$$\boxed{\text{Le bicommutant } \mathcal{B}(f) \text{ est une } \mathbb{K}\text{-algèbre contenant } \mathbb{K}[f].}$$

2. Étant donnés A, B inclus dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, on vérifie sans difficulté

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}(\mathrm{B}) \subset \mathcal{C}(\mathrm{A})$$

3.(a) Soit $u \in \mathcal{C}(\{f\})$. On note $u(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$ avec les a_k coordonnées de $u(x_0)$ dans la base $\mathscr{B} = (x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$. Pour $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, on a $f^i \in \mathcal{B}(f)$ d'où

$$u(f^i(x_0)) = (u \circ f^i)(x_0) = (f^i \circ u)(x_0) = f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+i}(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(f^i(x_0))$$

ce qui prouve que u et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ coïncident sur $\mathscr{B}$ et sont donc égaux. Ceci prouve $\mathcal{C}(\{f\}) \subset \mathbb{K}[f]$ et l'autre inclusion est immédiate d'où

$$\boxed{\mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]}$$

3.(b) Comme on $\{f\} \subset \mathbb{K}[f]$, il en résulte

$$\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathbb{K}[f]) \subset \mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]$$

L'autre inclusion ayant été établie à la question précédente, on conclut

$$\boxed{\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]}$$

Exercice 4 (***)

On pose
$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et dérivabilité de S.
2. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x^n}$

Les fonctions u_n sont définies au plus sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour $|x| > 1$, on a

$$\frac{x^n}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{-x^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

et pour $|x| < 1$
$$\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$$

d'où la convergence absolue de la série. On en déduit

$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie sur }]-1\,;1\,[.}$$

Soit $a \in [\,0\,;1\,[$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,-a\,;a\,] \qquad \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{1-|x|} \leqslant \frac{a^n}{1-a}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}(]-1\,;1\,[\,,\mathbb{R})}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \left]-1\,;1\right[\qquad u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

Soit $a \in \left[0\,;1\right[$. Il vient

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [-a\,;a] \qquad |u_n'(x)| \leqslant \frac{na^{n-1}}{(1-a)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\left]-1\,;1\right[$ et par théorème, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}^1(\left]-1\,;1\right[, \mathbb{R})}$$

2. Soit $x \in \left]0\,;1\right[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{1-x^t}$ est continue par morceaux sur $\left[1\,;+\infty\right[$, décroissante, positive. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ donc convergente. Par comparaison série/intégrale, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) = \frac{x}{1-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \frac{x}{1-x} + \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$$

avec
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(1-x^t)}{\ln(x)}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

d'où
$$\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Enfin, on constate
$$\frac{x}{x-1} \underset{x\to 1^-}{=} \mathrm{o}\left(\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}\right)$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}}$$

Variantes : (a) Si on reconnaît pas de dérivée dans l'expression $\dfrac{x^t}{1-x^t}$ avec $t \geqslant 1$, on peut utiliser le changement de variables $u = x^t$. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{\ln(x)}\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1-u}$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(x)}\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1-u} = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

(b) Pour la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$ avec $x \in \left]0\,;1\right[$, on peut remarquer

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} x^t \sum_{n=0}^{+\infty} x^{nt}\,\mathrm{d}t$$

Or, la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} x^{(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(x)}$ converge et par intégration terme à terme, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(x)} = -\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Exercice 5 (**)

Soit a vecteur unitaire d'un espace euclidien E, α un réel et f_α définie par

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, a\rangle a$$

1. Justifier que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer que $f_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \alpha \neq -1$. Décrire f_{-1}.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour avoir $f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Quand la condition est réalisée, décrire f_α.

Corrigé : 1. L'application f_α est clairement à valeurs dans E, linéaire par linéarité du produit scalaire en la première variable. Ainsi

$$\boxed{f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. On complète la famille (a) en $\mathscr{B}$ base orthonormée de E. Par suite, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f_\alpha = \mathrm{diag}(1+\alpha, 1, \ldots, 1)$. On en déduit $\det f_\alpha = 1 + \alpha$ et

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f_{-1}(x) = x - \langle x, a\rangle a = (\mathrm{id} - p_{\mathrm{Vect}\,(a)})(x) = p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}(x)$$

Ainsi $$\boxed{f_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \alpha \neq -1 \quad \text{et} \quad f_{-1} = p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}}$$

3. On a $$f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f_\alpha \in \mathcal{O}(n)$$

et clairement $$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f_\alpha \in \mathcal{O}(n) \iff (1+\alpha)^2 = 1 \iff \alpha \in \{0, -2\}$$

On conclut $$\boxed{f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff \alpha \in \{0, -2\} \quad \text{et} \quad f_0 = \mathrm{id}\,, \quad f_{-2} = s_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}}$$

Exercice 6 (**)

Déterminer le rayon puis la somme de $\sum \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$.

Corrigé : On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{C}_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Pour n entier, on a

$$\frac{\mathrm{C}_{n+1}}{\mathrm{C}_n} = \frac{n+1}{n+2}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$$

On en déduit que le rayon de convergence de $\sum \mathrm{C}_n z^n$ est $\dfrac{1}{4}$ d'après l'utilisation du critère de d'Alembert. Dans ce qui suit, on note $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{4}\right[$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$$

Par dérivation de série entière, on trouve

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{T}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[x\mathrm{S}(x)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

Toujours par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{T}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(n+1)(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n} x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\binom{2n}{n} x^n$$

et par linéarité du symbole somme dans l'intervalle ouvert de convergence I

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{T}'(x) = 4x\mathrm{T}'(x) + 2\mathrm{T}(x)$$

La fonction T est donc solution sur l'intervalle I du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1-4x)y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

D'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on en déduit

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{T}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

Après intégration, on trouve

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{S}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn.

1. Soit $(x_n)_n$ suite à valeurs dans E pour laquelle il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad n \neq p \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$$

   Montrer que $(x_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente.

2. Soit K un compact de E. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p non nul et $x_1, \ldots, x_p$ dans E tels que

$$\mathrm{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$$

Corrigé : 1. Supposons qu'il existe φ extractrice telle que $x_\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. On a

$$\varepsilon \leqslant \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leqslant \|x_{\varphi(n+1)} - \ell\| + \|\ell - x_{\varphi(n)}\| = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi $\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ n'admet aucune sous-suite convergente.}}$

2. Si K est vide, le résultat est trivial. On suppose K non vide et on procède par l'absurde : supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout p entier non nul et tous $a_1, \ldots, a_p$ dans E, on a $\mathrm{K} \not\subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathrm{B}(a_i, \varepsilon)$. On va alors construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans K vérifiant les contraintes de la première question. On la construit par récurrence : on choisit $x_1 \in \mathrm{K}$ puis, pour n entier, on choisit $x_{n+1} \in \mathrm{K} \smallsetminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$. Ainsi, on a bien

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \quad n \neq p \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$$

En effet, pour n et p entiers non nuls distincts avec par exemple $n > p$, si $\|x_n - x_p\| < \varepsilon$, on aurait alors $x_n \in \mathrm{B}(x_p, \varepsilon) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ ce qui est faux par construction. Il s'agit donc d'une suite à valeurs dans K compact et sans sous-suite convergente, ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists p \in \mathbb{N}^* \quad \exists (x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{E}^p \quad | \quad \mathrm{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)}$$

Exercice 8 (***)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + \ldots + t^{n-1}}$

Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n par rapport à $\dfrac{1}{n}$ pour $n \to +\infty$.

Corrigé : Soit n entier non nul. L'intégrale définissant u_n est bien définie en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment. On observe l'égalité avec l'intégrale faussement impropre en 1

$$u_n = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^n}\,\mathrm{d}t$$

On a $\qquad \forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \dfrac{1-t}{1-t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-t \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{1+t+\ldots+t^{n-1}} \leqslant 1$

La dominante $t \mapsto 1$ étant clairement intégrable sur $[\,0\,;1\,[$, il vient par convergence dominée

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Puis, il vient par linéarité de l'intégrale

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-t^n} - (1-t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = t^n$ donne

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{1-u}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

Avec le développement asymptotique $1 - u^{\frac{1}{n}} = 1 - \mathrm{e}^{\frac{\ln(u)}{n}} = -\dfrac{\ln(u)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, il vient

$$\forall u \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \frac{n(1-u^{\frac{1}{n}})}{1-u}u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\ln(u)}{1-u}$$

et avec l'inégalité de convexité $1 - \mathrm{e}^x \leqslant -x$ pour x réel

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;1\,[\qquad 0 \leqslant \frac{n(1-u^{\frac{1}{n}})}{1-u}u^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{-\ln(u)}{1-u}$$

La dominante $u \mapsto \dfrac{-\ln(u)}{1-u}$ est prolongeable par continuité en 0 et 1 et donc intégrable sur $]\,0\,;1\,[$. Par convergence dominée, il vient

$$\int_0^1 \frac{n(1-u^{\frac{1}{n}})}{1-u}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi $\qquad \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

Remarque : En justifiant la permutation des symboles, on peut établir

$$\int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 -\ln(u)\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 -\ln(u)u^n\,\mathrm{d}u = \zeta(2)$$

Variante : Soit n entier non nul. On a

$$u_n = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\sum_{k=0}^{+\infty} t^{kn}\,\mathrm{d}t$$

On pose $\qquad \forall (k,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,[\qquad f_k(t) = (1-t)t^{kn}$

Pour k entier, on a f_k intégrable sur $[\,0\,;1\,[$ car prolongeable par continuité sur le segment $[\,0\,;1\,]$ puis $\sum f_k$ converge simplement sur $[\,0\,;1\,[$ avec $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k$ continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,[$ puisque c'est précisément l'intégrande $t \mapsto \dfrac{1-t}{1-t^n}$. Enfin, on a

$$\sum \int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t = \sum \int_0^1 (1-t)t^{kn}\,\mathrm{d}t = \sum \left[\frac{1}{kn+1} - \frac{1}{kn+2}\right] = \sum \frac{1}{(kn+1)(kn+2)}$$

série convergente puisque $\dfrac{1}{(kn+1)(kn+2)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. Ainsi, par intégration terme à terme, on trouve

$$u_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(kn+1)(kn+2)}$$

On pose $\qquad \forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad v_k(n) = \dfrac{n^2}{(kn+1)(kn+2)}$

On a $\qquad \forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad 0 \leqslant v_k(n) \leqslant \dfrac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{k^2}$

Par conséquent, la série $\sum v_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}^*$ et par double limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} v_k(n) = \zeta(2)$$

Et on retrouve $\qquad u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} v_k(n) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n^2}\left(\zeta(2) + \mathrm{o}(1)\right)$

Exercice 9 (***)

On note E l'espace des fonctions continue sur $\mathbb{R}_+$ ayant une limite finie en $+\infty$. Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{T}_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \quad \text{et} \quad \forall (\alpha,t) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad f_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

1. Justifier que la suite $(\mathrm{T}_n(f))_{n\geqslant 1}$ est bien définie pour $f \in \mathrm{E}$.
2. Calculer $\mathrm{T}_n(f_\alpha)$ pour $(n,\alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ puis déterminer le comportement asymptotique de la suite $(\mathrm{T}_n(f_\alpha))_{n\geqslant 1}$.
3. Soit $f \in \mathrm{E}$. En considérant h définie sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$h(u) = \begin{cases} f(-\ln(u)) & \text{si } u \in \,]\,0\,;1\,] \\ \lim\limits_{+\infty} f & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

déterminer le comportement asymptotique de la suite $(\mathrm{T}_n(f))_{n\geqslant 1}$.

4. Soit $f \in \mathrm{E}$ puis $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{P}(1)$ et $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul.

(a) Calculer $\mathbb{E}\left[f\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right]$ pour n entier non nul.

(b) En déduire une nouvelle démonstration du résultat de la question 3.

Corrigé : 1. Soit $f \in \mathrm{E}$. Notons $\ell = \lim\limits_{+\infty} f$. On dispose d'un seuil $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que $|f(t)| \leqslant 2\ell$ pour $t \geqslant \mathrm{A}$ et la fonction continue f est bornée sur le segment $[\,0\,;\mathrm{A}\,]$. Il s'ensuit que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ puis

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad \left| f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \leqslant \|f\|_\infty \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$$

d'où la convergence absolue d'après la convergence de la série exponentielle. Ainsi

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{T}_n(f))_n \text{ est bien définie pour tout } f \in \mathrm{E}.}$$

2. Soit $(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$. On a $\mathrm{T}_n(f_\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\frac{k}{n}} \dfrac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$ d'où

$$\mathrm{T}_n(f_\alpha) = \exp\left[n\left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{n}} - 1\right)\right] = \exp\left[n\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right]$$

Ainsi $$\boxed{\forall (n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad \mathrm{T}_n(f_\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\alpha} = f_\alpha(1)}$$

3. Par construction, on a $h \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\|h - \mathrm{P}\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} \leqslant \varepsilon$$

Par commodité, on confond polynôme et fonction polynomiale. Notant $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, il vient

$$\|h \circ \varphi - \mathrm{P} \circ \varphi\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \|h - \mathrm{P}\|_{\infty,]\,0\,;1\,]} \leqslant \varepsilon$$

On écrit $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k \mathrm{X}^k$, on pose $p = \mathrm{P} \circ \varphi$ et remarquant $h \circ \varphi = f$, on obtient par inégalité triangulaire

$$|\mathrm{T}_n(f) - f(1)| \leqslant \underbrace{|\mathrm{T}_n(f) - \mathrm{T}_n(p)|}_{\leqslant \|f-p\|_{\infty,\mathbb{R}_+}} + |\mathrm{T}_n(p) - p(1)| + \underbrace{|p(1) - f(1)|}_{\leqslant \|f-p\|_{\infty,\mathbb{R}_+}}$$

Puis $$|\mathrm{T}_n(p) - p(1)| \leqslant \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} |a_k|\, |\mathrm{T}_n(f_k) - f_k(1)|$$

D'après le résultat de la question 2, on peut choisir n_0 entier tel que

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} |a_k|\, |\mathrm{T}_n(f_k) - f_k(1)| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, on a prouvé

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad |\mathrm{T}_n(f) - f(1)| \leqslant 3\varepsilon$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{T}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1)}$$

4.(a) Soit n entier non nul. Par indépendance, il vient

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{G}_{\mathrm{X}_i}(t) = (\mathrm{e}^{\,t-1})^n = \mathrm{e}^{\,n(t-1)}$$

La fonction génératrice caractérisant la loi, il s'ensuit que $\mathrm{S}_n \sim \mathscr{P}(n)$. La fonction f étant bornée, la variable $f\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)$ est d'espérance finie et par transfert

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \mathrm{T}_n(f)}$$

4.(b) Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{A}_n = \left\{\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right\}$. Il vient

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\tfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(1)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}\right) \leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{o}(1)$$

d'après la loi faible des grands nombres puisque $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1) = 1$. Pour $\delta > 0$, par continuité de f en 1, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \geqslant 0 \qquad |x-1| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(1)| \leqslant \delta$$

D'où
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(1)\right| \mathbb{1}_{\Omega \smallsetminus \mathrm{A}_n}\right) &= \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(1)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - 1\right| < \varepsilon}\right) \\ &\leqslant \delta\, \mathbb{P}(\Omega \smallsetminus \mathrm{A}_n) \leqslant \delta\end{aligned}$$

Ainsi
$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(1)\right|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par inégalité triangulaire, on conclut

$$\boxed{\mathrm{T}_n(f) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1)}$$