ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille de révisions n°3

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. Résoudre l'équation

$$\mathrm{X} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})\mathrm{A} = \mathrm{B} \tag{L}$$

d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$.

Corrigé : Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$. On a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})(1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))$$

Supposons $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq -1$. Si X est solution de (L), on a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})(1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})$$

d'où
$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})}{1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}$$

Ainsi
$$\mathrm{X} = \mathrm{B} - \frac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})}{1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}\mathrm{A}$$

et on vérifie sans difficulté que ce choix de X est bien solution. Supposons $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = -1$. Si X est solution de (L), on a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})(1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})) = 0$$

Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}) \neq 0$, alors il n'y a pas de solution. Supposons $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}) = 0$. On pose

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathrm{X}) = \mathrm{X} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})\mathrm{A}$$

On a $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\, f$, on a

$$\mathrm{X} = -\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})\mathrm{A} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}(1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})) = 0$$

ce qui prouve $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})$. On remarque $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$ et par conséquent

$$f(\mathrm{X}) = \mathrm{B} \iff f(\mathrm{X} - \mathrm{B}) = 0 \iff \mathrm{X} \in \mathrm{B} + \mathrm{Ker}\, f$$

On conclut

Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq -1$, l'équation (L) admet $\mathrm{B} - \dfrac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})}{1 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}\mathrm{A}$ comme unique solution. Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = -1$, l'équation (L) n'admet pas de solution si $\mathrm{B} \notin \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$ et sinon, l'ensemble des solutions est $\mathrm{B} + \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})$.

Exercice 2 (**)

1. Soient A, B dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{A} < \deg \mathrm{B}$. On suppose B scindé à racines simples avec $\mathrm{B} = \lambda \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \alpha_i)$. Montrer

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{B}'(\alpha_i)(\mathrm{X} - \alpha_i)}$$

2. Soit $z_1, \ldots, z_n$ des complexes non nuls deux à deux distincts. On note $\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X} - z_k)$.

Calculer $$\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k}{\mathrm{P}'(z_i)} \quad \text{pour } k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$$

Corrigé : 1. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on dispose de scalaires λ_i tels que

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mathrm{X} - \alpha_i}$$

Pour déterminer les λ_i, on effectue l'opération suivante

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}(\mathrm{X} - \alpha_i)\right]_{|\mathrm{X}=\alpha_i} = \lambda_i$$

Or, en écrivant $\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \alpha_i)\mathrm{Q}_i$ avec $\mathrm{Q}_i \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on constate que $\mathrm{P}'(\alpha_i) = \mathrm{Q}_i(\alpha_i)$ et il s'ensuit

$$\boxed{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{B}'(\alpha_i)(\mathrm{X} - \alpha_i)}}$$

Variante : On peut retrouver directement le résultat du théorème. Soit $(\mathrm{L}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base des polynômes d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ associée à $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On a $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}(\alpha_i)\mathrm{L}_i$ d'où

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\alpha_i)\mathrm{L}_i}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{B}'(\alpha_i)(\mathrm{X} - \alpha_i)}$$

2. Pour $k \in [\![0\,;\, n-2]\!]$, on a $$\frac{\mathrm{X}^{k+1}}{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^{k+1}}{\mathrm{P}'(z_i)(\mathrm{X} - z_i)}$$

Substituant X par zéro, il vient $$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k}{\mathrm{P}'(z_i)}$$

Pour $k = n-1$, on a $\deg \mathrm{X}^{k+1} = n$ donc il faudrait isoler la partie entière du reste. On a

$$\frac{\mathrm{X}^n}{\mathrm{P}} = 1 + \frac{\mathrm{X}^n - \mathrm{P}}{\mathrm{P}} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^n}{\mathrm{P}'(z_i)(\mathrm{X} - z_i)}$$

Substituant X par zéro, on trouve $$-1 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^n}{\mathrm{P}'(z_i)}$$

Ainsi $$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k}{\mathrm{P}'(z_i)} = \delta_{k,n-1}}$$

Exercice 3 (***)

Pour n entier non nul et $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\,\mathrm{d}x_1\right)\,\mathrm{d}x_2 \ldots\right)\,\mathrm{d}x_n$$

1. Soit $r \geqslant 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{rx}$ pour $x \in [\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il existe $a \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$

2. Soit f définie par $f(x) = \mathrm{P}(\mathrm{e}^x)$ pour $x \in [\,0\,;1\,]$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer

$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$

3. En déduire que pour $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On suppose $r > 0$. Par propriété fondamentale de l'exponentielle, on trouve

$$\mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \ldots \left(\int_0^1 \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{\frac{r}{n}x_i}\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \ldots \right) \mathrm{d}x_n$$

On intègre successivement en x_1, x_2, ... Il s'ensuit

$$\mathrm{S}_n(f) = \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{r}{n}x}\,\mathrm{d}x \right)^n = \left(\frac{n}{r}\right)^n \left(\mathrm{e}^{\frac{r}{n}} - 1\right)^n = \exp\left[n \left(-\ln\left(\frac{r}{n}\right) + \ln \mathrm{e}^{\frac{r}{n}} + \ln(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r}{n}}) \right) \right]$$

Avec le développement usuel $\qquad \mathrm{e}^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n(f) &= \exp\left[n \left(-\ln\left(\frac{r}{n}\right) + \frac{r}{n} + \ln\left(\frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) \right] \\ &= \exp\left[r + n \ln\left(1 - \frac{r}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]\end{aligned}$$

Le développement usuel $\ln(1-u) = u + \mathrm{o}(u)$ donne $\mathrm{S}_n(f) = \exp\left[r - \dfrac{r}{2} + \mathrm{o}(1) \right]$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Remarque : Le résultat vaut encore pour $r = 0$.

2. Soit n entier non nul. Par linéarité de l'intégrale, l'application S_n est une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ et par combinaison linéaire, on obtient

$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{S}_n(\mathrm{P} \circ \exp) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{P} \circ \exp\left(\frac{1}{2}\right)}$$

3. Soit n entier non nul. Posons $g(t) = f(\ln t)$ pour $t \in [\,1\,;\mathrm{e}\,]$. Pour $\varepsilon > 0$, le théorème de Weierstrass garantit l'existence de $\mathrm{P}_\varepsilon \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall t \in [\,1\,;\mathrm{e}\,] \qquad |\mathrm{P}_\varepsilon(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon$$

Par suite, notant $x = \ln t$, il vient

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad |\mathrm{P}_\varepsilon(\mathrm{e}^x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Par commodité, on confond polynôme et fonction polynomiale. Notant $\phi_\varepsilon = \mathrm{P}_\varepsilon \circ \exp$, il suffit alors d'écrire, par linéarité de S_n et par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left| \mathrm{S}_n(f) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| &= \left| \mathrm{S}_n(f - \phi_\varepsilon) + \mathrm{S}_n(\phi_\varepsilon) - \phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) + \phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &\leqslant |\mathrm{S}_n(f - \phi_\varepsilon)| + \left| \mathrm{S}_n(\phi_\varepsilon) - \phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) \right| + \left| \phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right|\end{aligned}$$

En appliquant n fois l'inégalité triangulaire, on a $|\mathrm{S}_n(f-\phi_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$. D'après le résultat de la question précédente, on peut trouver un seuil N tel que $\left|\mathrm{S}_n(\phi_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(\frac{1}{2})\right| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, on a montré

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad \left|\mathrm{S}_n(f) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant 3\varepsilon$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Remarque : On a démontré un cas particulier de *la loi faible des grands nombres* pour des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[\,0\,;1\,]$, à savoir

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\mathbb{E}(\mathrm{X})\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{X} \sim \mathscr{U}_{[\,0\,;1\,]} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\mathrm{X}) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4 (***)

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. On note S sa somme.
2. Déterminer de deux manière différentes $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{S}(x)$.
3. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to 1$.

Corrigé : 1. Avec $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$ pour n entier non nul, on trouve que le rayon de convergence de la série entière définissant S est

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

2. On pose
$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

Par comparaison, les séries concernées étant convergentes, on obtient

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Par comparaison, il vient
$$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$$

On peut aussi observer que S est croissante sur $[\,0\,;1\,[$ en tant que somme de fonctions croissantes. Par limite monotone, la fonction S admet une limite éventuellement infinie en 1. Pour N entier non nul, on a

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

d'où
$$\lim_{x\to 1^{-1}} \mathrm{S}(x) \geqslant \lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or, on a $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$ et par comparaison, on retrouve

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty}$$

3. Pour $x \in \left]0\,;1\right[$ fixé, on obtient par comparaison série/intégrale pour la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{\sqrt{t}}$ continue par morceaux, décroissante et positive et intégrable sur $\left]0\,;1\right]$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

l'intégrale et la série étant de même nature donc convergentes. Avec le changement de variables $t = u^2$, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2|\ln x|}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

Puis, on a
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \underset{x\to 1}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}}$$

Exercice 5 (***)

Soit $\alpha \in \left]0\,;1\right[$. On pose

$$\mathrm{C}_\alpha = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(-\ln u)^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

et
$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On admet que la fonction Γ est bien définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

1. Justifier que l'intégrale définissant C_α est convergente et déterminer sa valeur en fonction de la fonction Γ.
2. Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est bien définie puis déterminer son comportement asymptotique.
3. Déterminer un équivalent simple de I_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. On pose
$$\forall u \in \left]0\,;1\right[\qquad f(u) = \frac{1}{(-\ln u)^\alpha}$$

On a $f \in \mathscr{C}_{pm}(\left]0\,;1\right[, \mathbb{R})$ puis

$$f(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad f(u) \underset{u\to 1}{\sim} \frac{1}{(1-u)^\alpha}$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable en 0 et aussi en 1 par comparaison et critère de Riemann. Avec le changement de variables $t = -\ln u$, les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(-\ln u)^\alpha} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. On conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{C}_\alpha \text{ converge et on a } \mathrm{C}_\alpha = \Gamma(1-\alpha)}$$

2. On pose
$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \left[0\,;1\right[\qquad u_n(t) = \frac{t^n}{(1-t)^\alpha}$$

Pour n entier, on a $u_n \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,[\qquad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant \frac{1}{(1-t)^\alpha}$$

La dominante $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[\,0\,;1\,[$ par critère de Riemann et par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{I}_n)_n \text{ est bien définie et de limite nulle.}}$$

3. Soit n entier non nul. On pose $u = t^n$. On trouve

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right)^\alpha}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n^{1-\alpha}}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{\left(n(1-u^{\frac{1}{n}})\right)^\alpha}\,\mathrm{d}u$$

Puis $\qquad \forall u \in \,]\,0\,;1\,[\qquad n(1-u^{\frac{1}{n}}) = n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{\ln u}{n}}\right) = n\left(-\dfrac{\ln u}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln u$

Par concavité, il vient $\qquad \forall v \in [\,0\,;1\,] \qquad 1 - v^n \leqslant n(1-v)$

Ainsi, on a pour $u \in \,]\,0\,;1\,[$

$$\frac{u^{\frac{1}{n}}}{\left(n(1-u^{\frac{1}{n}})\right)^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{(-\ln u)^\alpha} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{u^{\frac{1}{n}}}{\left(n(1-u^{\frac{1}{n}})\right)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(1-u)^\alpha}$$

Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1-\alpha}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(-\ln u)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}_\alpha}{n^{1-\alpha}}}$$

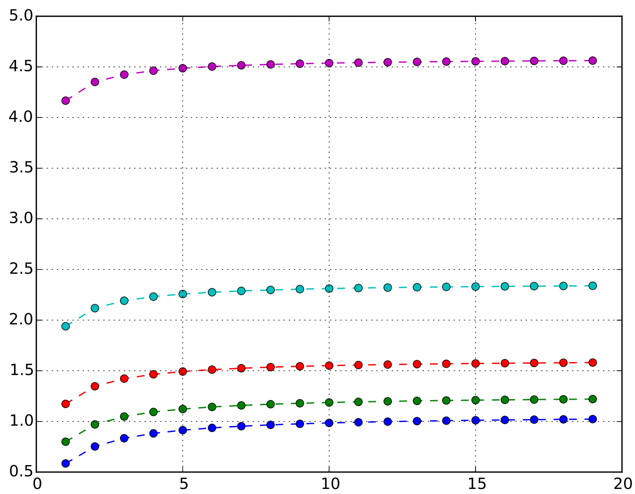

FIGURE 1 – Tracé de la suite $(n^{1-\alpha}\mathrm{I}_n)_n$ pour différentes valeurs de α

Exercice 6 (*)

Résoudre sur $]\,0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle

$$t^2x'' + 4tx' + 2x = \ln(t)$$

avec le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$.

Corrigé : Notons (L) l'équation différentielle linéaire. On pose $y(u) = x(\mathrm{e}^u)$. Par dérivation, on a

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad y(u) = x(\mathrm{e}^u) \qquad y'(u) = \mathrm{e}^u x'(\mathrm{e}^u) \qquad y''(u) = \mathrm{e}^{2u} x''(\mathrm{e}^u) + \mathrm{e}^u x'(\mathrm{e}^u)$$

d'où
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{S_L} &\iff y'' + 3y' + 2y = u \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall u \in \mathbb{R} \qquad y(u) = \alpha \mathrm{e}^{-u} + \beta \mathrm{e}^{-2u} + \frac{u}{2} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{S_L} = \left\{ \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{3}{4}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Exercice 7 (***)

Soit $(u_n)_n$ suite à valeurs positives sous-additive, c'est-à-dire telle que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ pour $n \geqslant 1$. On suppose qu'on dispose de $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant a) > 0$.

1. Soient m et r des entiers. Établir
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_{km+r} \leqslant k u_m + u_r$$
2. Justifier que la borne inférieure $\mathrm{L} = \inf \left\{ \frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$ est bien définie.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe m entier non nul tel que
$$\mathrm{L} \leqslant \frac{u_m}{m} \leqslant \mathrm{L} + \varepsilon$$
puis établir
$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{L}$$
On pourra effectuer la division euclidienne de n par m.
4. Établir pour m et n entiers non nuls
$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_m \geqslant na\right) \mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant ma) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)$$
puis en déduire $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant ma) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)$
5. Conclure que la suite $\left(\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \right)_{n \geqslant 1}$ est convergente.

Corrigé : 1. On procède par récurrence. L'initialisation pour $k = 0$ est immédiate et l'hérédité découle directement du caractère sous-additif de la suite. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_{km+r} \leqslant k u_m + u_r}$$

2. L'ensemble $\left\{ \frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée (par zéro) et admet donc une borne inférieure finie. Ainsi

$$\boxed{\text{La borne inférieure L est bien définie.}}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne inférieure L, on dispose de m entier non nul tel que

$$\boxed{\mathrm{L} \leqslant \frac{u_m}{m} \leqslant \mathrm{L} + \varepsilon}$$

Soit n entier. On effectue la division euclidienne de n par m avec $n = q_n m + r_n$ et $r_n \in [\![\, 0\,;\, m-1 \,]\!]$. D'après le résultat de la question 1, on a

$$u_n = u_{q_n m + r_n} \leqslant q_n u_m + u_{r_n}$$

Puis, il vient

$$\mathrm{L} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_m}{m}\frac{q_n m}{n} + \frac{u_{r_n}}{n} \leqslant (\mathrm{L}+\varepsilon)\frac{q_n m}{n} + \frac{\mathrm{M}}{n} \leqslant \mathrm{L} + \varepsilon + \frac{\mathrm{M}}{n}$$

où $\mathrm{M} = \underset{0 \leqslant k \leqslant m-1}{\mathrm{Max}} u_k$. On a $\dfrac{\mathrm{M}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et pour n assez grand, on obtient

$$\mathrm{L} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \mathrm{L} + 2\varepsilon$$

On conclut
$$\boxed{\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{L}}$$

4. Soient m et n des entiers non nuls. On a

$$\{\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_n \geqslant na\} \cap \{\mathrm{S}_m \geqslant ma\} \subset \{\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\}$$

D'où
$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_n \geqslant na, \mathrm{S}_m \geqslant ma\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)$$

Or, les variables $\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_m = \sum_{k=m+1}^{m+n} \mathrm{X}_k$ et $\mathrm{S}_m = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{X}_k$ sont indépendantes par coalition d'où

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_m \geqslant na\right)\mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant ma) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)}$$

En observant que $\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_m$ et S_n ont même loi comme somme de m variables aléatoires indépendantes de même loi, on trouve

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)\mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant ma) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)}$$

5. On a $\bigcap_{i=1}^{n} \{\mathrm{X}_i \geqslant a\} \subset \{\mathrm{S}_n \geqslant na\}$ d'où

$$0 < \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant a)^n \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)$$

Passant au logarithme, on obtient que la suite $\left(-\ln \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)\right)_n$ est à valeurs positives et sous-additive. D'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{1}{n}\ln \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)\right)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente.}}$$

Remarque : Il s'agit d'un résultat de *grandes déviations*.