ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille de révisions n°4

Exercice 1 (*)

Déterminer l'espace tangent à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Corrigé : Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top \mathrm{M}$. L'application f est à coordonnées polynomiales d'où $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathrm{E})$. On a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$ et $\mathrm{d}f(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{H} = \mathrm{H}^\top \mathrm{M} + \mathrm{M}\mathrm{H}^\top$ d'où $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) \cdot \mathrm{H} = \mathrm{T} + \mathrm{H}^\top$. On a $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{T} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice 2 (**)

Soit A matrice compagne de $(u_n)_n \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ suite récurrente linéaire d'ordre $p \geqslant 2$. Résoudre $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ avec $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x_0 & \ldots x_{p-1} \end{pmatrix}$ non nulle. En déduire la forme des sous-espaces propres de A et une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A.

Corrigé : On a $$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n$$
avec a_i des scalaires et $a_0 \neq 0$. On rappelle

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{X}_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{p-1} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \times \mathrm{X}_n = \mathrm{AX}_n$$

On note $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i \mathrm{X}^i$. On a

$$\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X} \iff \begin{cases} x_1 = \lambda x_0 \\ \vdots \\ x_{p-1} = \lambda x_{p-2} \\ a_0 x_0 + \ldots a_{p-1} x_{p-1} = \lambda x_{p-1} \end{cases} \iff \begin{cases} (x_0, \ldots, x_{p-1}) = x_0(1, \lambda, \ldots, \lambda^{p-1}) \\ x_0 \mathrm{P}(\lambda) = 0 \end{cases}$$

On remarque en particulier que $\mathrm{X} \neq 0 \iff x_0 \neq 0$. La dernière équation indique donc λ racine de P. Par ailleurs, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Si la matrice A est diagonalisable, alors on a $\dim \mathbb{K}^p = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ ce qui prouve que A admet p valeurs propres distinctes et la réciproque étant immédiate, on conclut

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\,(1, \lambda, \ldots, \lambda^{p-1}) \\ \text{A diagonalisable} \iff \text{A admet } p \text{ valeurs propres distinctes.} \end{array}}$$

Exercice 3 (***)

Pour $x > -1$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty\,[$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x > -1$.

Corrigé : 1. On pose $$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{t-1}{\ln t} t^x$$
avec $\mathrm{X} =]-1\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{I} =]\,0\,;1\,[$. On vérifie :

• Soit $x \in \mathrm{X}$. On a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $f(x,t) \xrightarrow[t \to 1]{} 1$ donc prolongeable par continuité en 1 et

$$t^{-x} f(x,t) \underset{t \to 0}{\sim} -\frac{1}{\ln t} \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \iff f(x,t) \underset{t \to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{-x}}\right) \quad \text{avec} \quad -x < 1$$

d'où l'intégrabilité en 0 par comparaison et critère de Riemann. Ainsi, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

• Domination : Soit $a > -1$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t^a$$

et la dominante $t \mapsto t^a$ est intégrable sur I par critère de Riemann. Par conséquent, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ et ce pour tout $a > -1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]-1\,;+\infty\,[\,, \mathbb{R})}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale puis linéarité car convergence des intégrales concernées par critère de Riemann, on trouve

$$\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{1+x}$$

D'où $$\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On remarque $$\forall t \in \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant \frac{t-1}{\ln t} \leqslant 1$$

d'où $$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant t^x$$

et après intégration $$\forall x \in \mathrm{X} \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^1 t^x \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

Par encadrement, il vient $$\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

On conclut $$\boxed{\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)}$$

En particulier, on trouve $$\mathrm{F}(0) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$$

Variante : Sans invoquer l'inégalité $\ln t \leqslant t-1$ pour $t \in \mathrm{I}$, on peut aussi observer que $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est prolongeable par continuité sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc bornée sur ce segment et conclure comme précédemment.

Exercice 4 (****)

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Déterminer les éléments propres de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$.

Corrigé : On suppose $b \neq 0$ sinon, il n'y a rien à faire. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{AX} = \gamma \mathrm{X}$ avec $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{cases} (a-\gamma)x_1 + bx_2 = 0 \\ bx_{k-1} + (a-\gamma)x_k + bx_{k+1} = 0 \\ bx_{n-1} + (a-\gamma)x_n = 0 \end{cases}$$

En posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, la suite $(x_k)_{k \in [\![\,0\,;\,n+1\,]\!]}$ ainsi complétée vérifie

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad x_{k+1} + cx_k + x_{k-1} = 0 \quad \text{avec} \quad c = (a-\gamma)/b \tag{1}$$

Autrement dit, il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Supposons que l'équation caractéristique $r^2 + cr + 1 = 0$ admette deux racines distinctes α et β. On aurait alors

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad \forall k \in [\![\,0\,;\,n+1\,]\!] \qquad x_k = \lambda \alpha^k + \mu \beta^k$$

Les conditions aux bords donnent $x_0 = \lambda + \mu = 0$ d'où $\lambda = -\mu$ et $x_{n+1} = \lambda(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = 0$. Si $\lambda = 0$, on aurait alors $x_k = 0$ pour tout $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ ce qui est exclu puisque $\mathrm{X} \neq 0$. Par suite

$$\lambda(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha^{n+1} = \beta^{n+1}$$

Or, on a l'égalité $\alpha\beta = 1$ (terme constant de l'équation caractéristique) d'où

$$(\alpha\beta)^{n+1} = 1 = (\alpha^{n+1})^2 = (\beta^{n+1})^2$$

Par suite, les complexes α et β sont racines $2n+2$-ième de l'unité et comme $\alpha\beta = 1$, elles sont conjuguées. Ainsi

$$\forall k \in [\![\,0\,;\,n+1\,]\!] \qquad \exists \ell \in [\![\,0\,;\,2n+1\,]\!] \quad | \quad x_k = \lambda\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi\ell}{2n+2}} - \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi\ell}{2n+2}}\right) = 2\mathrm{i}\lambda \sin\left(\frac{\ell k \pi}{n+1}\right)$$

On peut exclure le cas $\ell = 0$ car sinon, on aurait $x_k = 0$ pour tout $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. On a la somme des racines $\alpha + \beta = -c$ d'où

$$\gamma = a + 2b\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

Pour $\ell \in [\![1\,;\, n]\!]$, on aurait alors n valeurs propres distinctes candidates par injectivité du cos sur $]\,0\,;\pi\,[$.

Réciproquement, pour $\ell \in [\![1\,;\, n]\!]$, on pose

$$\gamma_\ell = a + 2b\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0\,;\, n+1]\!] \qquad x_k = \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

La suite $(x_k)_{k\in[\![0\,;\,n+1]\!]}$ vérifie bien la relation (**1**) autrement dit, le vecteur X correspondant est vecteur propre de A pour la valeur propre γ_ℓ. Or on a exhibé n valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{\text{La matrice A est diagonalisable et } \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) = \left\{a + 2b\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right), \ell \in [\![1\,;\, n]\!]\right\}}$$

Exercice 5 (**)

Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et f sa somme.

1. Montrer $\qquad \forall r \in [\,0\,;\mathrm{R}\,[\qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \,\mathrm{d}\theta$
2. Que peut-on dire de f si $|f|$ admet un maximum local en zéro ?

Corrigé : 1. Soit $r \in [\,0\,;\mathrm{R}\,[$. La série $\sum a_n r^n$ converge absolument et par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall z \in \mathrm{D}_f(0,r) \qquad |f(z)| \leqslant \mathrm{C}_r \quad \text{avec} \quad \mathrm{C}_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, r^n$$

On a
$$\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\overline{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\,\mathrm{d}\theta$$

On pose
$$\forall (n,\theta) \in \mathbb{N}\times[\,0\,;2\pi\,] \qquad u_n(\theta) = a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\overline{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}$$

et on a
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_\infty \leqslant |a_n|\, r^n \mathrm{C}_r$$

qui est le terme d'une série convergente. Ainsi, la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[\,0\,;2\pi\,]$ et il vient

$$\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\overline{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a_k} r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Pour n entier fixé, on pose

$$\forall (n,\theta) \in \mathbb{N}\times[\,0\,;2\pi\,] \qquad v_n(\theta) = \bar{a_k} r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}$$

On a
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |v_n|_\infty \leqslant |a_k|\, r^k$$

qui est le terme d'une série convergente d'où la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum v_n$ sur $[\,0\,;2\pi\,]$. On obtient

$$\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_n \bar{a_k} r^{n+k} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{=2\pi\delta_{n,k}}$$

On conclut
$$\boxed{\forall r \in [\,0\,;\mathrm{R}\,[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \,\mathrm{d}\theta}$$

2. On choisit $r \in \left]0\,;\mathrm{R}\right[$ assez petit pour avoir $\left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 - |f(0)|^2 \leqslant 0$ pour tout $\theta \in [0\,;2\pi]$. On en déduit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2\, r^{2n} \leqslant 0$ ce qui implique $a_n = 0$ pour tout n entier non nul. On conclut

$$\boxed{\text{Si la fonction } |f| \text{ admet un maximum local en zéro, alors la fonction } f \text{ est constante.}}$$

Exercice 6 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer le théorème de Cauchy linéaire pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

Corrigé : La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ est solution du problème de Cauchy. Soit X une solution de ce problème. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\mathrm{X}(t)\right] = \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\left[-\mathrm{AX}(t) + \mathrm{AX}(t)\right] = 0$$

ce qui prouve que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\mathrm{X}(t)$ est constante puisque ses fonctions coordonnées sont de dérivées nulles sur $\mathbb{R}$. On en déduit $\mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\mathrm{X}(t) = \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0$ pour tout t réel autrement dit $\mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ et on conclut

$$\boxed{\text{Le problème de Cauchy } \begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0 \end{cases} \text{ admet une unique solution.}}$$

Exercice 7 (**)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ diagonalisable. Déterminer la forme des solutions de l'équation $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$.
2. Soient $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des scalaires et A la matrice compagne associée à l'équation différentielle scalaire linéaire d'ordre p

$$x^{(p)} + a_{p-1}x^{(p-1)} + \ldots + a_0 x = 0 \qquad \text{(H)}$$

   Établir que la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle admet p valeurs propres distinctes.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. Notant $(\mathrm{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{DY} \iff \mathrm{Y} \in \mathrm{Vect}\,\left(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathrm{E}_i\right)_{1\leqslant i\leqslant p} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\,\left(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathrm{PE}_i\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'ensemble des solutions est Vect } \left(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathrm{V}_i\right)_{1\leqslant i\leqslant p} \text{ avec les} \\ \lambda_i \text{ valeurs propres de A et les } \mathrm{V}_i \text{ vecteurs propres associés.}\end{array}}$$

2. La matrice compagne associée à l'équation (H) est donnée par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

On a $\qquad \text{(H)} \iff X' = AX \quad \text{avec} \quad X^\top = \begin{pmatrix} x & x' & \dots & x^{(p-1)} \end{pmatrix}$

Supposons A diagonalisable. En appliquant le résultat précédent et en spécialisant pour la première coordonnée, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}$$

avec les α_i des scalaires et les λ_i valeurs propres de A. Ainsi, la famille $\left(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est génératrice de S_H. Comme l'espace S_H est un sev de $\mathscr{C}^p(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ de dimension égale à p, on a nécessairement les λ_i deux à deux distincts. La réciproque est la condition suffisante de diagonalisation. On conclut

$\boxed{\text{La matrice compagne A est diagonalisable si et seulement si elle admet } p \text{ valeurs propres distinctes.}}$

Remarque : Ce résultat peut être établi par des arguments ne relevant que de l'algèbre linéaire.

Exercice 8 (***)

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$. On note $M_n = \operatorname{Max}(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer un équivalent simple de $\mathbb{E}(M_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé : On note $q = 1 - p$. Soit k entier non nul. On a par indépendance des X_i

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant k)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant k\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant k)$$

puis par égalité en loi

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad \mathbb{P}(X_i \leqslant k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\ell=1}^{k} \{X_i = \ell\}\right) = \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = \ell) = \sum_{\ell=1}^{k} p q^{\ell-1} = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k$$

et la formule vaut aussi pour $k = 0$. Ainsi, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(M_n \leqslant k) = (1-q^k)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(M_n > k) = 1 - (1-q^k)^n$$

et par antirépartition, on a dans $[\,0\,;+\infty\,]$

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M_n > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[1 - (1-q^k)^n\right]$$

On pose $\qquad \forall t \geqslant 0 \qquad f(t) = 1 - (1-q^t)^n$

La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, décroissante par composition. Par décroissance de f, il vient

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et par sommation

$$\forall N \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{N} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a $\qquad f(t) \underset{t \to +\infty}{=} 1 - (1 - nq^t + \mathrm{o}(q^t)) \underset{t \to +\infty}{\sim} nq^t = n\mathrm{e}^{t \ln q}$

On en déduit l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$ et faisant tendre $N \to +\infty$ dans l'encadrement précédemment établi, il vient

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{M}_n) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On réalise le changement de variables $u = 1 - q^t$ qui équivaut à $t\ln q = \ln(1-u)$ d'où $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{(1-u)\ln q}$. La fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(1-u)}{\ln q}$ réalise une bijection de $]\,0\,;1\,[$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante. Ainsi, les intégrales concernées sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales avec

$$\int_0^{+\infty} \left[1-(1-q^t)^n\right]\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\ln q}\int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\ln q}\int_0^1 \sum_{\ell=0}^{n-1} u^\ell\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\ln q}\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell+1}$$

Ainsi
$$\int_0^{+\infty} \left[1-(1-q^t)^n\right]\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{\ln q}$$

On conclut
$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{\ln q}}$$

Remarque : Dans l'expression sommatoire

$$\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[1-(1-q^k)^n\right]$$

on peut aussi développer le binôme à l'intérieur puis permuter les sommes

$$\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}(-1)^\ell q^{k\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}(-1)^\ell\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}(-1)^\ell\frac{q^\ell}{1-q^\ell}$$

Exercice 9 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{M} \in \mathrm{E} \mapsto \det(\mathrm{M})$.

1. Montrer que f est différentiable et préciser sa différentielle.
2. Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des solutions respectives des problèmes de Cauchy

$$\forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} \\ \mathrm{X}(0) = x_i \end{cases}$$

avec $\mathrm{A} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{E})$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{W}(t) = \det(\mathrm{X}_1(t)|\ldots|\mathrm{X}_n(t))$$

(a) Montrer que W est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

(b) En déduire une expression intégrale de $\mathrm{W}(t)$ pour t réel.

(c) Si la fonction A est constante, déterminer une expression simple de $\det \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ pour t réel.

Corrigé : 1. Le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice ce qui prouve que la fonction f est différentiable. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. On a

$$\det \mathrm{M} = \sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1,\sigma(1)}\ldots m_{n,\sigma(n)}$$

d'où

$$\forall (i,j) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^2 \qquad \partial_{i,j} f(\mathrm{M}) = \sum_{\sigma on \mathrm{S}_n | \sigma(i)=j} \varepsilon(\sigma) m_{1,\sigma(1)}\ldots m_{i-1,\sigma(i-1)} m_{i+1,\sigma(i+1)}\ldots m_{n,\sigma(n)}$$

et
$$\forall \mathrm{H} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{M})\cdot\mathrm{H} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \partial_{i,j} f(\mathrm{M}) h_{i,j}$$

On reconnaît dans l'expression de $\partial_{i,j} f(\mathrm{M})$ le cofacteur d'indice (i,j) d'où

$$\boxed{\forall \mathrm{H} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathrm{Com}(\mathrm{M})_{i,j} h_{i,j} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Com}\,\mathrm{M}^\top \mathrm{H})}$$

2.(a) Posons $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = (\mathrm{X}_1(t)|\ldots|\mathrm{X}_n(t))$

On a $\qquad \mathrm{W} = \det \circ \mathrm{X}$

avec det différentiable et X dérivable. Il s'ensuit que $\det \circ \mathrm{X}$ est dérivable avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{W}'(t) = (\det \circ \mathrm{X})'(t) = \mathrm{d}\det(\mathrm{X}(t)) \cdot \mathrm{X}'(t) = \mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{Com}\,\mathrm{X}(t)^\top \mathrm{X}'(t)\right)$$

Sans difficulté, on observe $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t)$ pour t réel et par suite

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{W}'(t) = \mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{Com}\,\mathrm{X}(t)^\top \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t)\right)$$

Avec la relation fondamentale de la trace puis la propriété reliant matrice et comatrice, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{W}'(t) = \mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t)\mathrm{Com}\,\mathrm{X}(t)^\top\right) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}(t)\det \mathrm{X}(t)\mathrm{I}_n) = \det \mathrm{X}(t)\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}(t)$$

Autrement dit $\qquad \boxed{\mathrm{W}' = \mathrm{Tr}\,\mathrm{A}(t)\mathrm{W}}$

2.(b) Le wronskien W solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{W}' = \mathrm{Tr}\,\mathrm{A}(t)\mathrm{W} \\ \mathrm{W}(0) = \det \mathrm{X}(0) = \det x \end{cases} \qquad \text{avec} \quad x = (x_1|\ldots|x_n)$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{W}(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{Tr}\,\mathrm{A}(s)\,\mathrm{d}s} \det x}$

2.(c) On a $\qquad \forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}_i(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}} x_i$

d'où $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}} x$

Par suite $\quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{W}(t) = \det \mathrm{X}(t) = \det\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} x\right) = \left(\det \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\right)(\det x) = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}} \det x$

On peut choisir $x = \mathrm{I}_n$ et on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \det \mathrm{e}^{t\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}}}$$

Exercice 10 (***)

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$.
3. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$.
4. Montrer que si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{G} = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : On rappelle qu'une matrice $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle vérifiant $\mathrm{X}^\top \mathrm{S}\mathrm{X} > 0$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et on a la caractérisation pour $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$

$$\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}\,(\mathrm{S}) \subset \,]\,0\,;+\infty\,[$$

1. On a $\mathrm{I}_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soient A, B dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $(\mathrm{AB})^\top \mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ et $(\mathrm{A}^{-1})^\top \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{AA}^\top = \mathrm{I}_n$. Puis, munissant $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, on a clairement $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{S}(0, \sqrt{n})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$ avec $\varphi : \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top \mathrm{M}$ continue car à coordonnées polynomiales.

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe compact de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

2. D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_i)$ avec les $\lambda_i > 0$. On note $\mathrm{D} = \mathrm{P}^\top\mathrm{AP}$ et on pose $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ puis $\mathrm{S} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top$. On vérifie sans difficulté $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}^2 = \mathrm{P}\Delta^2\mathrm{P}^\top = \mathrm{PDP}^\top = \mathrm{A}$. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{A} = \mathrm{S}^2.}$$

3. On a $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ puisque pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}$

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{AX} = \|\mathrm{AX}\|^2 > 0$$

Ainsi, il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. On a S inversible puisque pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{SX} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X}^\top\mathrm{SX} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X} = 0$$

On pose ensuite $\mathrm{O} = \mathrm{AS}^{-1}$ et on a

$$\mathrm{O}^\top\mathrm{O} = (\mathrm{AS}^{-1})^\top\mathrm{AS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{AS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{I}_n$$

On conclut $\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \exists (\mathrm{O}, \mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad | \quad \mathrm{A} = \mathrm{OS}}$

4. Soit G sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et soit $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$. On utilise le résultat de la décomposition polaire : il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$. Ainsi, on a $\mathrm{S} = \mathrm{O}^\top\mathrm{A} \in \mathrm{G}$ et par conséquent

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}^k \in \mathrm{G}$$

La suite $(\mathrm{S}^k)_k$ est à valeurs dans G compact donc admet une sous-suite convergente. D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top\mathrm{SP}$ est diagonale. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ normée avec $\mathrm{SX} = \lambda\mathrm{X}$. Si $\lambda > 1$, on a

$$\langle \mathrm{S}^k\mathrm{X}, \mathrm{X} \rangle = \lambda^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui contredit l'existence d'une sous-suite convergente. Si $\lambda < 1$, on trouve

$$\langle \mathrm{S}^k\mathrm{X}, \mathrm{X} \rangle = \lambda^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

et une sous-suite convergente aurait une valeurs propre nulle ce qui contredit l'existence d'une valeur d'adhérence dans G. Par conséquent, on $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S}) = \{1\}$ et comme S est diagonalisable, elle est semblable à I_n et donc $\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$, d'où $\mathrm{A} = \mathrm{O}$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{G} = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice 11 (***)

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels deux à deux distincts. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x - a_n|}{2^n\,(1 + |a_n|)}$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F n'est dérivable en aucun point a_n avec n entier.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \qquad f_n(x) = \dfrac{|x-a_n|}{2^n(1+|a_n|)}$

Soit $\alpha \geqslant 0$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,-\alpha\,;\alpha\,] \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n(1+|a_n|)}\,(|x|+|a_n|) \leqslant \frac{\alpha+1}{2^n}$$

On en déduit que la série de fonctions continues $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[\,-\alpha\,;\alpha\,]$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soit n_0 entier. On considère

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_{n_0}\} \qquad \tau(x) = \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a_{n_0})}{x-a_{n_0}} = \frac{f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a_{n_0})}{x-a_{n_0}} + \sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} \frac{f_n(x)-f_n(a_{n_0})}{x-a_{n_0}}$$

Par inégalité triangulaire inverse, on a pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_{n_0}\} \qquad \left|\frac{f_n(x)-f_n(a_{n_0})}{x-a_{n_0}}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

et
$$\frac{f_n(x)-f_n(a_{n_0})}{x-a_{n_0}} \xrightarrow[x\to a_{n_0}]{} \frac{\varepsilon_n}{2^n(1+|a_n|)} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n \in \{-1,1\}$$

On a convergence normale et par double limite, on trouve

$$\sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} \frac{f_n(x)-f_n(a_{n_0})}{x-a_{n_0}} \xrightarrow[x\to a_{n_0}]{} \sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n(1+|a_n|)}$$

Enfin, le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a_{n_0})}{x-a_{n_0}}$ n'admet pas de limite pour $x \to a_{n_0}$ et par conséquent la fonction τ non plus. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction F n'est dérivable en aucun point } a_n \text{ avec } n \text{ entier.}}$$