ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

# Feuille de révisions n°5

## Exercice 1 (***)

Vérifier l'existence puis calculer

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$$

**Corrigé :** Soit $n \geqslant 2$. On pose

$$\forall t \geqslant 0 \qquad f_n(t) = \frac{1}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$$

On a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Notons $\mathrm{P} = \prod\limits_{k=1}^{n}(\mathrm{X}+k)$ et $\mathrm{P} = (\mathrm{X}+k)\mathrm{P}_k$ pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Par décomposition en éléments simples, il existe des réels $\alpha_k$ tels que

$$\frac{1}{\mathrm{P}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\mathrm{X}+k}$$

Pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ fixé, multipliant l'égalité précédente par $\mathrm{X}+k$ puis substituant $\mathrm{X} = -k$, on trouve

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \alpha_k = \frac{1}{\mathrm{P}_k(-k)}$$

avec
$$\mathrm{P}_k(-k) = \prod_{i=1}^{k-1}(-k-i)) \prod_{i=k+1}^{n}(i-k) = (-1)^{k-1}(k-1)!(n-k)!$$

d'où
$$\frac{1}{\mathrm{P}} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{\mathrm{X}+k}$$

Ainsi, pour $x > 0$, il vient par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\left[\ln(x+k) - \ln k\right] \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\left[\ln x + \ln\left(1+\frac{k}{x}\right) - \ln k\right]\end{aligned}$$

Or, un changement d'indice montre que $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1} = (1-1)^{n-1}$ et faisant tendre $x \to +\infty$, on conclut

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\ln k}$$

## Exercice 2 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E.

1. Déterminer $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}$.

2. En déduire $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp}$.
3. On suppose $\mathrm{F}^{\perp} \perp \mathrm{G}^{\perp}$. Montrer

$$p_{\mathrm{F}} + p_{\mathrm{G}} - p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}} = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad p_{\mathrm{F}} \circ p_{\mathrm{G}} = p_{\mathrm{G}} \circ p_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}$$

**Corrigé :** 1. On a $\mathrm{F} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ d'où $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} \subset \mathrm{F}^{\perp}$ et $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} \subset \mathrm{G}^{\perp}$. Ainsi, on a $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} \subset \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$ et $(u, v) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$. On a

$$\langle x, u + v \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, v \rangle = 0$$

d'où l'inclusion $\mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp} \subset (\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp}$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp} = (\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp}}$$

2. En appliquant le résultat antérieur à $\mathrm{F}^{\perp}$ et $\mathrm{G}^{\perp}$, il vient

$$\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = (\mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp})^{\perp}$$

Passant à l'orthogonal, on obtient $\boxed{(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp}}$

3. On a $$\mathrm{E} = \mathrm{F}^{\perp} \oplus \mathrm{G}^{\perp} \oplus (\mathrm{F}^{\perp} \oplus \mathrm{G}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \oplus \mathrm{G}^{\perp} \oplus (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$$

Soit $x \in \mathrm{E}$. On décompose

$$x = a + b + c \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathrm{F}^{\perp} \times \mathrm{G}^{\perp} \times (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$$

Il vient $$p_{\mathrm{F}}(x) = b + c \qquad p_{\mathrm{G}}(x) = a + c \qquad p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}(x) = c$$

d'où $$(p_{\mathrm{F}} + p_{\mathrm{G}} - p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}})(x) = a + b + c = x$$

et $$p_{\mathrm{F}} \circ p_{\mathrm{G}}(x) = p_{\mathrm{F}}(a + c) = c = p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}(x)$$

et l'autre égalité suit par symétrie des rôles. Ainsi

$$\boxed{p_{\mathrm{F}} + p_{\mathrm{G}} - p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}} = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad p_{\mathrm{F}} \circ p_{\mathrm{G}} = p_{\mathrm{G}} \circ p_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}}$$

**Variante :** Avec la décomposition en somme directe

$$\mathrm{E} = \mathrm{F}^{\perp} \oplus \mathrm{G}^{\perp} \oplus (\mathrm{F}^{\perp} \oplus \mathrm{G}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \oplus \mathrm{G}^{\perp} \oplus (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$$

en considérant la famille de projecteurs associés, il vient

$$p_{\mathrm{F}^{\perp}} + p_{\mathrm{G}^{\perp}} + p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}} = \mathrm{id}$$

autrement dit $$\mathrm{id} - p_{\mathrm{F}} + \mathrm{id} - p_{\mathrm{G}} + p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}} = \mathrm{id}$$

et on retrouve la première égalité. En composant celle-ci par $p_{\mathrm{F}}$ à droite ou gauche, il vient

$$p_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}} \circ \mathrm{id} = p_{\mathrm{F}} \circ (p_{\mathrm{F}} + p_{\mathrm{G}} - p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}) = p_{\mathrm{F}} + p_{\mathrm{F}} \circ p_{\mathrm{G}} - \underbrace{p_{\mathrm{F}} \circ p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}}_{= p_{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}}$$

et de même avec $p_{\mathrm{G}}$ pour les dernières égalités.

## Exercice 3 (***)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n \ln n}$$

1. Justifier que $f$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. La fonction $f$ est-elle dérivable en $0$ ?

3. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour $x \to +\infty$.

**Corrigé :** 1. On pose $\qquad \forall n \geqslant 2 \qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f_n(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n \ln n}$

Les fonctions $f_n$ sont dérivables avec

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f_n'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n \ln n}(1 - nx)$$

d'où
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \|f_n\|_\infty = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n^2 \ln n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, la série de fonctions continues $\sum_{n \geqslant 2} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et on obtient

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

La série $\sum_{n \geqslant 2} f_n'$ converge simplement sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puisque $f_n'(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour $x > 0$ par croissances comparées. S'il y avait convergence uniforme de $\sum_{n \geqslant 2} f_n'$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$, on aurait par double limite

$$\sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

ce qui est absurde puisque la série de Bertrand $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge. Soit $[\,a\,;b\,] \subset\, ]\,0\,;+\infty\,[$. On trouve

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \|f_n'\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-na}(1 + nb)}{n \ln n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par conséquent, la série $\sum_{n \geqslant 2} f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $]\,0\,;+\infty\,[$ et on conclut

$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad f \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,, \mathbb{R})}$$

2. On a $f(0) = 0$. La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ décroît sur $]\,0\,;+\infty\,[$ en tant que somme de fonctions décroissantes et admet donc une limite éventuellement infinie en $0^+$ par limite monotone. Puis, pour N entier

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} \geqslant \lim_{x \to 0} \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n \ln n}$$

Comme $\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{n \ln n} \xrightarrow[\mathrm{N} \to +\infty]{}$, il vient par comparaison

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

Ainsi
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

3. Soit $x \geqslant 0$. On a
$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-2x}}{2 \ln 2} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n \ln n}$$

Puis $$0 \leqslant \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n\ln n} \leqslant \frac{x}{3\ln 3}\sum_{n=3}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{x}{3\ln 3}\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{o}(x\mathrm{e}^{-2x})$$

On conclut $$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\mathrm{e}^{-2x}}{2\ln 2}}$$

## Exercice 4 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ une groupe fini non commutatif et $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé avec X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{U}_{\mathrm{G}}$. On définit le centre de $(\mathrm{G}, \times)$ noté $\mathrm{Z(G)}$ par
$$\mathrm{Z(G)} = \{x \in \mathrm{G} \mid \forall g \in \mathrm{G} \quad xg = gx\}$$
et pour $x \in \mathrm{G}$, on définit son centralisateur $\mathrm{C}_x$ par
$$\mathrm{C}_x = \{g \in \mathrm{G} \mid gx = xg\}$$

1. Soit $x \in \mathrm{G}$. Montrer que $\mathrm{Z(G)}$ et $\mathrm{C}_x$ sont des sous-groupes de $(\mathrm{G}, \times)$ avec $x \in \mathrm{C}_x$ et $\mathrm{Z(G)} \subset \mathrm{C}_x$.
2. Établir $$\mathbb{P}(\mathrm{XY} = \mathrm{YX}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|^2}\left(|\mathrm{G}|\,|\mathrm{Z(G)}| + \sum_{x\in\mathrm{G}\smallsetminus\mathrm{Z(G)}} |\mathrm{C}_x|\right)$$
3. En déduire $$\mathbb{P}(\mathrm{XY} = \mathrm{YX}) \leqslant \frac{5}{8}$$

**Corrigé :** 1. Sans difficulté.

2. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{XY} = \mathrm{YX}) &= \sum_{(x,y)\in\mathrm{G}^2 \mid xy=yx} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x, \mathrm{Y} = y)\\ &= \sum_{(x,y)\in\mathrm{G}^2} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y)\delta_{xy,yx} = \frac{1}{|\mathrm{G}|^2}\sum_{(x,y)\in\mathrm{G}^2} \delta_{xy,yx} = \frac{1}{|\mathrm{G}|^2}\sum_{x\in\mathrm{G}} |\mathrm{C}_x|\end{aligned}$$
Pour $x \in \mathrm{Z(G)}$, on a clairement $\mathrm{C}_x = \mathrm{G}$ d'où
$$\mathbb{P}(\mathrm{XY} = \mathrm{YX}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|^2}\left(\sum_{x\in\mathrm{Z(G)}} |\mathrm{G}| + \sum_{x\in\mathrm{G}\smallsetminus\mathrm{Z(G)}} |\mathrm{C}_x|\right)$$

Ainsi $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{XY} = \mathrm{YX}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|^2}\left(|\mathrm{G}|\,|\mathrm{Z(G)}| + \sum_{x\in\mathrm{G}\smallsetminus\mathrm{Z(G)}} |\mathrm{C}_x|\right)}$$

3. On rappelle le résultat du théorème de Lagrange : dans un groupe fini, l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe. Pour $x \in \mathrm{G} \smallsetminus \mathrm{Z(G)}$, on a $\mathrm{C}_x$ sous-groupe strict de G d'où $|\mathrm{C}_x| \leqslant \dfrac{|\mathrm{G}|}{2}$. Il vient
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{XY} = \mathrm{YX}) &\leqslant \frac{1}{\mathrm{G}^2}\left(|\mathrm{G}|\,|\mathrm{Z(G)}| + \frac{|\mathrm{G}|}{2}\,|\mathrm{G} \smallsetminus \mathrm{Z(G)}|\right)\\ &\leqslant \frac{1}{|\mathrm{G}|}\left(|\mathrm{Z(G)}| + \frac{1}{2}\left(|\mathrm{G}| - |\mathrm{Z(G)}|\right)\right)\\ \mathbb{P}(\mathrm{XY} = \mathrm{YX}) &\leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|\mathrm{Z(G)}|}{|\mathrm{G}|}\right)\end{aligned}$$
Enfin, on choisit $x \in \mathrm{G} \smallsetminus \mathrm{Z(G)}$ ce qui est possible puisque $(\mathrm{G}, \times)$ n'est pas commutatif. On a alors les inclusions strictes

$$\mathrm{Z(G)} \subsetneq \mathrm{C}_x \subsetneq \mathrm{G}$$

puisque $x \in \mathrm{C}_x \setminus \mathrm{Z(G)}$ et que l'égalité $\mathrm{C}_x = \mathrm{G}$ équivaut à $x \in \mathrm{Z(G)}$. On en déduit

$$|\mathrm{Z(G)}| \leqslant \frac{|\mathrm{C}_x|}{2} \quad \text{et} \quad |\mathrm{C}_x| \leqslant \frac{|\mathrm{G}|}{2}$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{XY} = \mathrm{YX}) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}}$$

## Exercice 5 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit le *rayon spectral* d'une matrice noté $\rho$ par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \rho(\mathrm{A}) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}{\mathrm{Max}} |\lambda|$$

1. Montrer $$\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \iff \rho(\mathrm{A}) < 1$$

   et $$\rho(\mathrm{A}) > 1 \implies \|\mathrm{A}^k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

   On pourra considérer la norme $\|\cdot\|_1$ pour certaines étapes de calcul.

2. Établir $$\lim_{k\to+\infty} \|\mathrm{A}^k\|^{1/k} = \rho(\mathrm{A})$$

**Corrigé :** 1. On considère $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et sur l'espace E. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et X normé (on normalise un vecteur propre) tel que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$. Ainsi, on a $\mathrm{A}^k\mathrm{X} = \lambda^k \mathrm{X}$ pour tout $k$ entier d'où, par propriétés de la norme choisie

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad |\lambda|^k = \|\mathrm{A}^k\mathrm{X}\| \leqslant \|\mathrm{A}^k\|\|\mathrm{X}\| = \|\mathrm{A}^k\|$$

Si $\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, alors $|\lambda| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ d'où $|\lambda| < 1$. Si $|\lambda| > 1$, alors $\|\mathrm{A}^k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$ (ceci vaut pour toute norme par équivalence). Ceci prouve le sens direct de l'équivalence et la seconde implication. Réciproquement, on suppose $\rho(\mathrm{A}) < 1$. On dispose de $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{T}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}$$

avec les $\mathrm{T}_\lambda$ triangulaires supérieures strictes. On pose

$$\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda})_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \quad \text{et} \quad \mathrm{N} = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\mathrm{T}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}\mathrm{P}^{-1}$$

Ainsi, on a $\mathrm{A} = \mathrm{B}+\mathrm{N}$ avec B diagonalisable, N nilpotente car semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et un produit par blocs montre $\mathrm{BN} = \mathrm{NB}$. On note $\ell$ l'ordre de nilpotence de N. Pour $p$ entier, on obtient avec la formule du binôme

$$\mathrm{A}^p = (\mathrm{B}+\mathrm{N})^p = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{p}{k} \mathrm{B}^{p-k}\mathrm{N}^k$$

On note $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \in \mathrm{D}(0,1)$ puisque ce sont les valeurs propres de A. Pour $\lambda \in \mathrm{D}(0,1)$, on a par croissances comparées

$$\binom{p}{k}\lambda^{p-k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}\lambda^{p-k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!}\lambda^{p-k} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

On en déduit $$\binom{p}{k}\mathrm{D}^{p-k} = \mathrm{diag}\left(\binom{p}{k}\lambda_1^{p-k}, \ldots \binom{p}{k}\lambda_n^{p-k}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0_{\mathrm{E}}$$

et pour $k \in [\![ 0\,;\ell-1 ]\!]$, l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{PMP}^{-1}\mathrm{N}^k$ étant linéaire en dimension finie donc continue, il vient

$$\binom{p}{k}\mathrm{B}^{p-k}\mathrm{N}^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0_{\mathrm{E}}$$

d'où
$$\mathrm{A}^p = \sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{p}{k}\mathrm{B}^{p-k}\mathrm{N}^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0_{\mathrm{E}}$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \iff \rho(\mathrm{A}) < 1 \quad \text{et} \quad \rho(\mathrm{A}) > 1 \quad \Longrightarrow \quad \|\mathrm{A}^k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty}$$

2. Si $\rho(\mathrm{A}) = 0$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) = 0$ d'où A nilpotente et le résultat est immédiat. On suppose $\rho(\mathrm{A}) > 0$. Soit $\varepsilon \in \left]0\,;\rho(\mathrm{A})\right[$. On pose

$$\mathrm{A}_+ = \frac{1}{\rho(\mathrm{A})+\varepsilon}\mathrm{A} \qquad \mathrm{A}_- = \frac{1}{\rho(\mathrm{A})-\varepsilon}\mathrm{A}$$

On a
$$\rho(\mathrm{A}_+) = \frac{\rho(\mathrm{A})}{\rho(\mathrm{A})+\varepsilon} < 1 \quad \text{et} \quad \rho(\mathrm{A}_-) = \frac{\rho(\mathrm{A})}{\rho(\mathrm{A})-\varepsilon} > 1$$

D'après le résultat de la première question, on en déduit

$$\mathrm{A}_+^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \|\mathrm{A}_-^k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

On en déduit qu'il existe un seuil N entier tel que pour $k \geqslant \mathrm{N}$

$$\|\mathrm{A}_+^k\| < 1 \quad \text{et} \quad \|\mathrm{A}_-^k\| > 1$$

d'où
$$\|\mathrm{A}^k\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\mathrm{A}^k\|^{\frac{1}{k}} \geqslant \rho(\mathrm{A}) - \varepsilon$$

On conclut
$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \|\mathrm{A}^k\|^{1/k} = \rho(\mathrm{A})}$$

## Exercice 6 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle discrète et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour $n$ entier. On suppose qu'il existe $\tau > 0$ tel que $\mathrm{e}^{\tau|\mathrm{X}|}$ est d'espérance finie. On note $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\varphi : t \mapsto \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$ est définie sur I un intervalle contenant $[-\tau\,;\tau]$.
2. Établir que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\tau\,;\tau\right[$.
3. Montrer
$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant \exp\left(n\chi(t)\right) \quad \text{avec} \quad \chi(t) = \ln\varphi(t) - ta$$
   On suppose désormais $a > \mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a) > 0$.
4. Justifier que $\chi$ est minorée sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$.
   On note $\eta_a = \operatorname*{Inf}_{t\in \mathrm{I}\cap\mathbb{R}_+} \chi(t)$.
5. Préciser un équivalent de $\chi(t)$ lorsque $t \to 0$. En déduire $\eta_a < 0$.
6. Conclure qu'il existe $r \in [0\,;1[$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant r^n$$

**Corrigé :** 1. On note $$\mathrm{I} = \left\{t \in \mathbb{R} \mid \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) < \infty\right\}$$
Pour $t \in [\,-\tau\,;\tau\,]$, on a $0 \leqslant \mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \leqslant \mathrm{e}^{\tau|\mathrm{X}|}$ ce qui prouve $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) < \infty$. Par ailleurs, pour $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ avec $a < b$ et $t \in [\,a\,;b\,]$, on a $tx \leqslant tb$ si $x \geqslant 0$ et $tx \leqslant ta$ si $x \leqslant 0$ d'où
$$0 \leqslant \mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \leqslant \mathrm{e}^{a\mathrm{X}} + \mathrm{e}^{b\mathrm{X}}$$
ce qui prouve $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) < \infty$ pour $t \in [\,a\,;b\,]$ par comparaison. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est définie sur un intervalle de } \mathbb{R} \text{ contenant } [\,-\tau\,;\tau\,].}$$

2. Par transfert, on a $$\forall t \in [\,-\tau\,;\tau\,] \qquad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{tx_n}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$

On pose $$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \,]\,-\tau\,;\tau\,[ \qquad u_n(t) = \mathrm{e}^{tx_n}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$
Les fonctions $u_n$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,-\tau\,;\tau\,[$. Par dérivation, pour $k$ entier, on trouve
$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \,]\,-\tau\,;\tau\,[ \qquad u_n^{(k)}(t) = x_n^k \mathrm{e}^{tx_n}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$
Soit $a \in [\,0\,;\tau\,[$. Il vient pour $n$ entier
$$\|u_n^{(k)}\|_{\infty,[\,-a\,;a\,]} \leqslant |x_n|^k\,\mathrm{e}^{(a-\tau)|x_n|}\mathrm{e}^{\tau|x_n|}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$
La fonction $u \mapsto u^k\mathrm{e}^{(a-\tau)u}$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ de limite nulle en $+\infty$ et est donc bornée sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Il en résulte
$$\|u_n^{(k)}\|_{\infty,[\,-a\,;a\,]} = \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{\tau|x_n|}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)\right)$$
d'où la convergence normale et donc uniforme de $\sum u_n^{(k)}$ sur tout segment inclus dans $]\,-\tau\,;\tau\,[$. On conclut

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(]\,-\tau\,;\tau\,[\,,\mathbb{R})}$$

3. Soit $n$ entier non nul et $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$. Par croissance de $u \mapsto \mathrm{e}^{tu}$, il vient
$$\{\mathrm{S}_n \geqslant na\} \subset \left\{\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{tna}\right\}$$
On a $\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}$. Par récurrence sur $n$, on étend le résultat du cours pour le produit de deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie et on obtient que la variable $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}$ est d'espérance finie avec
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})^n$$
D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire positive $\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}$, on obtient
$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{tna}) \leqslant \mathrm{e}^{-tna}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n})$$
Enfin, la variable $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ est positive, non nulle presque sûrement donc d'espérance strictement positive et on conclut

$$\boxed{\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant \exp\left(n\chi(t)\right) \quad \text{avec} \quad \chi(t) = \ln\varphi(t) - ta}$$

4. Avec $n = 1$ dans l'inégalité précédemment établie, on trouve
$$\forall t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ \qquad 0 < \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a) \leqslant \exp\chi(t)$$

D'où $$\boxed{\forall t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ \qquad \chi(t) \geqslant \ln\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a)}$$

5. La fonction $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de telles fonctions sur $]-\tau\,;\tau\,[$ et d'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \varphi(0) + \varphi'(0)t + \mathrm{o}(t)$$

Par dérivation d'une somme de série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, on a

$$\forall t \in\, ]-\tau\,;\tau\,[ \qquad \varphi'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathrm{e}^{tx_n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$

puis
$$\varphi'(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) = \mathbb{E}(\mathrm{X})$$

Ainsi
$$\varphi(t) = 1 + t\mathbb{E}(\mathrm{X}) + \mathrm{o}(t)$$

puis
$$\chi(t) = \ln\left(1 + t\mathbb{E}(\mathrm{X}) + \mathrm{o}(t)\right) - ta = t\left(\mathbb{E}(\mathrm{X}) - a + \mathrm{o}(1)\right) \underset{t\to 0}{\sim} t\,\underbrace{(\mathbb{E}(\mathrm{X}) - a)}_{<0}$$

On en déduit que la fonction $\chi$ prend des valeurs strictement négatives et par conséquent

$$\boxed{\eta_a < 0}$$

6. Par passage à la borne inférieure, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant r^n \quad \text{avec} \quad r = \mathrm{e}^{\eta_a} \in [\,0\,;1\,[}$$

## Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On note

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{N}_k = \mathrm{Ker}\, f^k \qquad \mathrm{I}_k = \mathrm{Im}\, f^k \qquad d_k = \dim \mathrm{N}_{k+1} - \dim \mathrm{N}_k$$

1. Montrer que les suites $(\mathrm{I}_k)_k$ et $(\mathrm{N}_k)_k$ sont respectivement décroissante et croissante et qu'elles sont simultanément stationnaires.
2. On note $r$ le rang à partir duquel les suites stationnent. Montrer $\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{N}_r$.
3. En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{N} \end{array}\right)$ où C une matrice carrée inversible et N est une matrice carré nilpotente.
4. Montrer la décroissance de $(d_k)_k$.

**Corrigé :** 1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{E}$. On a

$$f^k(x) = 0_{\mathrm{E}} \quad \Longrightarrow \quad f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) = 0_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad y = f^{k+1}(x) \quad \Longrightarrow \quad y = f^k(f(x))$$

D'où
$$\mathrm{Ker}\, f^k \subset \mathrm{Ker}\, f^{k+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, f^{k+1} \subset \mathrm{Im}\, f^k$$

Ainsi
$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{N}_k)_k \text{ croît et la suite } (\mathrm{I}_k)_k \text{ décroît.}}$$

Il s'ensuit que les suite $(\dim \mathrm{N}_k)_k$ et $(\dim \mathrm{I}_k)_k$ sont respectivement croissantes et décroissantes. Comme $(\dim \mathrm{I}_k)_k$ est décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est stationnaire à partir d'un certain rang et d'après le théorème du rang, la suite $(\dim \mathrm{N}_k)_k$ est stationnaire à partir du même rang. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut

$$\boxed{\text{Les suites } (\mathrm{I}_k)_k \text{ et } (\mathrm{N}_k)_k \text{ sont simultanément stationnaires.}}$$

2. Soit $x \in \mathrm{I}_r \cap \mathrm{N}_r$. On a

$$f^r(x) = 0_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad x = f^r(t) \quad \text{avec} \quad t \in \mathrm{E}$$

Par suite, on a $f^r(x) = f^{2r}(t) = 0_{\mathrm{E}}$ d'où $t \in \mathrm{N}_{2r}$. Or la suite $(\mathrm{N}_k)_k$ stationne à partir de $r$ d'où $\mathrm{N}_{2r} = \mathrm{N}_r$ et par conséquent $t \in \mathrm{N}_r$ et donc $x = f^r(t) = 0_{\mathrm{E}}$. Le théorème du rang donne

$$\dim \mathrm{I}_r + \dim \mathrm{N}_r = \dim \mathrm{E}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{N}_r}$$

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. Les sous-espaces $\mathrm{I}_r$ et $\mathrm{N}_r$ sont clairement stables par $f$. Notant $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\mathrm{I}} \cup \mathscr{B}_{\mathrm{N}}$ une base adaptée à la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{N}_r$, on en déduit la forme diagonale par blocs de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$. Notons respectivement $f_{\mathrm{I}_r}$ et $f_{\mathrm{N}_r}$ les endomorphismes induits par $f$ respectivement sur $\mathrm{I}_r$ et $\mathrm{N}_r$. On a clairement $(f_{\mathrm{N}_r})^r = 0$ d'où $\mathrm{N} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{N}}} f_{\mathrm{N}_r}$ matrice nilpotente. Puis

$$\mathrm{Ker}\, f_{\mathrm{I}_r} = \mathrm{N}_1 \cap \mathrm{I}_r \subset \mathrm{N}_r \cap \mathrm{I}_r = \{0_{\mathrm{E}}\}$$

D'où $f_{\mathrm{I}_r}$ injectif et donc bijectif. On peut aussi rédiger $f_{\mathrm{I}_r}(\mathrm{I}_r) = \mathrm{I}_r$ par stationnarité d'où la surjectivité et donc la bijectivité. Ainsi, la matrice $\mathrm{C} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{I}}} f_{\mathrm{I}_r}$ est inversible et comme A et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$ sont les matrices d'un même endomorphisme dans des bases éventuellement distinctes, on conclut

$$\boxed{\text{A semblable à } \begin{pmatrix} \mathrm{C} & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix} \text{ avec C inversible et N nilpotente}}$$

4. Notons $n_k = \dim \mathrm{N}_k$ pour tout $k$ entier. Fixons $k \in \mathbb{N}$. On a $\mathrm{N}_{k+1} \subset \mathrm{N}_{k+2}$. Soit H supplémentaire de $\mathrm{N}_{k+1}$ dans $\mathrm{N}_{k+2}$ et $f_{|\mathrm{H}}$ la restriction de $f$ à H. Celle-ci est à valeurs dans $\mathrm{N}_{k+1}$ puisque comme $\mathrm{H} \subset \mathrm{N}_{k+2}$, on a

$$\forall x \in \mathrm{H} \qquad f^{k+1}(f(x)) = f^{k+2}(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

Par ailleurs $$\mathrm{Ker}\, f_{|\mathrm{H}} = \mathrm{H} \cap \mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{H} \cap \mathrm{N}_{k+1} = \{0_{\mathrm{E}}\}$$

Ainsi, la restriction $f_{\mathrm{H}}$ réalise un isomorphisme de H sur $f(\mathrm{H})$ un sev de $\mathrm{N}_{k+1}$. Enfin, soit $x \in \mathrm{N}_k \cap f(\mathrm{H})$. On a

$$\exists t \in \mathrm{H} \quad | \quad x = f(t) \quad \text{et} \quad f^k(x) = f^{k+1}(t) = 0_{\mathrm{E}}$$

Par suite $$t \in \mathrm{N}_{k+1} \cap \mathrm{H} = \{0_{\mathrm{E}}\} \quad \Longrightarrow \quad x = f(t) = 0_{\mathrm{E}}$$

On a donc $$\mathrm{N}_{k+1} \oplus \mathrm{H} = \mathrm{N}_{k+2} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_k \oplus f(\mathrm{H}) \subset \mathrm{N}_{k+1}$$

Passant aux dimensions, il vient

$$\dim \mathrm{H} = n_{k+2} - n_{k+1} \quad \text{et} \quad n_k + \dim f(\mathrm{H}) \leqslant n_{k+1} \quad \text{avec} \quad \dim f(\mathrm{H}) = \dim \mathrm{H}$$

d'où $$n_{k+2} - n_{k+1} \leqslant n_{k+1} - n_k$$

Autrement dit $$\boxed{\text{La suite } (d_k)_k \text{ décroît.}}$$