ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille de révisions n°6

Exercice 1 (**)

Soit E préhilbertien réel. Pour $(u_1,\ldots,u_n)\in \mathrm{E}^n$, on note $\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_n)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_n)=\big(\langle u_i,u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{E}^n$ libre et $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\,(x_1,\ldots,x_n)$.

Établir $$\forall x\in \mathrm{E}\qquad \mathrm{d}(x,\mathrm{F})^2=\frac{\det \mathrm{G}(x,x_1,\ldots,x_n)}{\det \mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n)}$$

Corrigé : Soit $x\in \mathrm{E}$. On décompose $x=a+b$ avec $(a,b)\in \mathrm{F}\times\mathrm{F}^{\perp}$. D'après le théorème de Pythagore, on a $\langle x,x\rangle=\langle a,a\rangle+\langle b,b\rangle$ puis $\langle x,x_i\rangle=\langle x_i,a\rangle$ pour tout $i\in [\![1\,;\,n]\!]$. Avec

$$\mathrm{G}(x,x_1,\ldots,x_n)=\begin{pmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,x_1\rangle & \ldots & \langle x,x_n\rangle\\ \langle x_1,x\rangle & \langle x_1,x_1\rangle & \ldots & \langle x_1,x_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle x_n,x\rangle & \langle x_n,x_1\rangle & \ldots & \langle x_n,x_n\rangle\end{pmatrix}$$

et notant $a=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$ avec les a_i réels, il vient

$$\det \mathrm{G}(x,x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}\|b\|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\,\langle a,x_i\rangle & \langle a,x_1\rangle & \ldots & \langle a,x_n\rangle\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\,\langle x_1,x_i\rangle & \langle x_1,x_1\rangle & \ldots & \langle x_1,x_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\,\langle x_n,x_i\rangle & \langle x_n,x_1\rangle & \ldots & \langle x_n,x_n\rangle\end{vmatrix}$$

et avec l'opération $\mathrm{C}_1\leftarrow \mathrm{C}_1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mathrm{C}_{i+1}$, on obtient

$$\det \mathrm{G}(x,x_1,\ldots,x_n)=\|b\|^2\det \mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n)=\mathrm{d}(x,\mathrm{F})^2\det \mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n)$$

On conclut $$\boxed{\forall x\in \mathrm{E}\qquad \mathrm{d}(x,\mathrm{F})^2=\frac{\det \mathrm{G}(x,x_1,\ldots,x_n)}{\det \mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n)}}$$

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E}=\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique puis soient $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, B et X_0 dans E. Pour $u\in\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, on considère le problème de Cauchy

$$(\mathrm{S}) :\begin{cases}\mathrm{X}'=\mathrm{AX}+\mathrm{B}u(t)\\ \mathrm{X}(0)=\mathrm{X}_0\end{cases}$$

Pour X la solution de ce problème de Cauchy, on note $\Phi(u)=\mathrm{X}(1)$. On dit que le système (S) régi par le problème de Cauchy est *contrôlable* si l'application $\Phi:\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})\to \mathrm{E}$ est surjective. On pose

$$\forall u\in\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})\qquad \Psi(u)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}u(s)\,\mathrm{d}s$$

et le *gramien* $$\mathrm{G} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}\mathrm{B}^\top \mathrm{e}^{-\mathrm{A}^\top s}\,\mathrm{d}s$$

1. Pour $u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, déterminer une expression de $\Phi(u)$.
2. Montrer $$\Phi \text{ surjective} \iff \Psi \text{ surjective}$$
3. On suppose le gramien G inversible et pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad u(s) = \mathrm{B}^\top \mathrm{e}^{\mathrm{A}^\top s}\mathrm{X}$$
   (a) Déterminer $\Psi(u)$.
   (b) En déduire que le système (S) est contrôlable.
4. On suppose le gramien G non inversible.
   (a) Justifier qu'il existe $\mathrm{X} \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{X}^\top\mathrm{G}\mathrm{X} = 0$.
   (b) En déduire $$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}, \mathrm{X}\right\rangle = 0$$
   (c) Montrer $$\forall u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \qquad \langle \Psi(u), \mathrm{X}\rangle = \int_0^1 \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}, \mathrm{X}\right\rangle u(s)\,\mathrm{d}s$$
   (d) En déduire que le système (S) n'est pas contrôlable.
5. Conclure $$\text{le système (S) est contrôlable} \iff \mathrm{G} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

1. Par variation de la constante, on trouve

$$\boxed{\forall u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \qquad \Phi(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\left(\mathrm{X}_0 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}u(s)\,\mathrm{d}s\right)}$$

2. On pose $$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E} \qquad \Lambda(\mathrm{X}) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}(\mathrm{X}_0 + \mathrm{X})$$
L'application Λ est une permutation de E puisque pour $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathrm{E}^2$, on a
$$\Lambda(\mathrm{X}) = \mathrm{Y} \iff \mathrm{X} = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}}\mathrm{Y} - \mathrm{X}_0$$
et comme on a $\Phi = \Lambda \circ \Psi$, on conclut
$$\boxed{\Phi \text{ surjective} \iff \Psi \text{ surjective}}$$

3.(a) Il vient $$\Psi(u) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}\mathrm{B}^\top\mathrm{e}^{\mathrm{A}^\top s}\mathrm{X}\,\mathrm{d}s$$

Autrement dit $$\boxed{\Psi(u) = \mathrm{G}\mathrm{X}}$$

3.(b) L'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{G}\mathrm{X}$ réalise une permutation de E dans E car G est inversible et est donc en particulier surjective. Il s'ensuit que Ψ est surjective et on conclut

$$\boxed{\text{Le système (S) est contrôlable.}}$$

4.(a) Comme le gramien est non inversible, on dispose de $\mathrm{X} \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{G}\mathrm{X} = 0$ et par conséquent

$$\boxed{\exists \mathrm{X} \in \mathrm{E} \setminus \{0\} \;\mid\; \mathrm{X}^\top\mathrm{G}\mathrm{X} = 0}$$

4.(b) Il vient

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{G}\mathrm{X} = \mathrm{X}^\top \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}\mathrm{B}^\top \mathrm{e}^{-\mathrm{A}^\top s}\,\mathrm{d}s\mathrm{X} = \int_0^1 \mathrm{X}^\top \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}\mathrm{B}^\top \mathrm{e}^{-\mathrm{A}^\top s}\mathrm{X}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \|\mathrm{B}^\top \mathrm{e}^{-\mathrm{A}^\top s}\mathrm{X}\|^2\,\mathrm{d}s = 0$$

La fonction $s \mapsto \|\mathrm{B}^\top \mathrm{e}^{-\mathrm{A}^\top s}\mathrm{X}\|^2$ est continue, positive sur $[\,0\,;1\,]$ et par séparation de l'intégrale, il vient

$$\boxed{\forall s \in [\,0\,;1\,]\ \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}, \mathrm{X}\right\rangle = 0}$$

4.(c) Soit $u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. Il vient par linéarité de l'intégrale et de l'application $v \mapsto \langle v, \mathrm{X}\rangle$

$$\langle \Psi(u), \mathrm{X}\rangle = \left\langle \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}u(s)\,\mathrm{d}s, \mathrm{X}\right\rangle = \int_0^1 \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}u(s), \mathrm{X}\right\rangle\,\mathrm{d}s$$

Ainsi $$\boxed{\forall u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \qquad \langle \Psi(u), \mathrm{X}\rangle = \int_0^1 \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}, \mathrm{X}\right\rangle u(s)\,\mathrm{d}s}$$

4.(d) On déduit des résultats des deux questions précédentes que

$$\forall u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \qquad \langle \Psi(u), \mathrm{X}\rangle = 0$$

Ainsi $$\operatorname{Im} \Psi \subset \operatorname{Vect}(\mathrm{X})^\perp$$

L'espace $\operatorname{Vect}(\mathrm{X})^\perp$ est un hyperplan de E ce qui contredit Ψ surjective et on conclut

$$\boxed{\text{Le système (S) n'est pas contrôlable.}}$$

5. D'après le résultat de la question 3 et la contraposée de l'implication établie à la question 4, on conclut

$$\boxed{\text{Le système (S) est contrôlable} \iff \mathrm{G} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice 3 (***)

Soit n entier non nul et $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ et de la norme euclidienne associée. On pose $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad f(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \operatorname{Tr}(\mathrm{M}) & \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^2) & \ldots & \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^n) \end{pmatrix}$$

1. (a) Établir $\qquad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$

   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que

   $$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad |\operatorname{Tr}(\mathrm{A})| \leqslant \alpha\|\mathrm{A}\|$$

2. Montrer que f est différentiable et déterminer $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

3. (a) Montrer $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \operatorname{rg} \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_{\mathrm{M}}$

   (b) En déduire que l'ensemble des matrices de E dont le polynôme minimal est de degré n est un ouvert de E.

Corrigé : 1.(a) L'application $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B}) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. Il en résulte que $\mathrm{M} \mapsto \sqrt{\operatorname{Tr}(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})}$ est une norme sur E. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. On a $\|\mathrm{C}\|^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} c_{i,j}^2$. Par définition du produit matriciel et inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad c_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)$$

Ainsi $$\|\mathrm{C}\|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)\right] = \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\leqslant k,j\leqslant n} b_{k,j}^2\right)$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{M} \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})} \text{ est une norme sous-multiplicative sur E.}}$$

1.(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$|\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})| = |\langle \mathrm{I}_n, \mathrm{A}\rangle| \leqslant \|\mathrm{I}_n\|\|\mathrm{A}\|$$

Ainsi $$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{A} \qquad |\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})| \leqslant \sqrt{n}\|\mathrm{A}\|}$$

2. Notons $\varphi_k : \mathrm{M} \to \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k)$ pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. L'application φ_k est polynomiale en les coefficients de la matrice d'où $\varphi_k \in \mathscr{C}^1(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Pour $(\mathrm{M},\mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a

$$(\mathrm{M}+\mathrm{H})^k = (\mathrm{M}^k + \mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H} + \mathrm{M}^{k-2}\mathrm{HM} + \ldots + \mathrm{HM}^{k-1} + \mathrm{R}$$

avec R une somme de produits qui contient au moins deux occurrences de H. Avec les inégalités établies à la question 1, il en résulte que $|\mathrm{Tr}\,(\mathrm{R})| = \mathrm{o}(\|\mathrm{H}\|)$ et on en déduit

$$\varphi_k(\mathrm{M}+\mathrm{H}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k + \mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H} + \mathrm{M}^{k-2}\mathrm{HM} + \ldots + \mathrm{HM}^{k-1}) + \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

d'où $$\forall (\mathrm{M},\mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{d}(\varphi_k)(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = k\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H})$$

Par suite

$$\boxed{\forall (\mathrm{M},\mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = \begin{pmatrix}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{H}) & 2\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{MH}) & \ldots & n\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^{n-1}\mathrm{H})\end{pmatrix}}$$

3.(a) Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) &\iff \forall k \in [\![0\,;\,n-1]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k\mathrm{H}) = 0 \\
&\iff \forall k \in [\![0\,;\,n-1]\!] \qquad \left\langle \left(\mathrm{M}^\top\right)^k, \mathrm{H}\right\rangle = 0 \\
\mathrm{H} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) &\iff \mathrm{H} \in \mathrm{Vect}\,\left(\mathrm{I}_n, \mathrm{M}^\top, \ldots, \left(\mathrm{M}^\top\right)^{n-1}\right)^\perp
\end{aligned}$$

On note $d = \deg \pi_{\mathrm{M}^\top}$. On a

$$\mathbb{R}[\mathrm{M}^\top] = \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}^\top] \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{M}^\top] \subset \mathbb{R}[\mathrm{M}^\top]$$

ce qui prouve que les inclusions sont des égalités et $(\mathrm{I}_n, \ldots, \left(\mathrm{M}^\top\right)^{d-1})$ est libre. Ainsi, on a

$$\mathrm{H} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \iff \mathrm{H} \in \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}]^\perp$$

d'où $$\dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \dim \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}]^\perp = \dim \mathrm{E} - \dim \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}] = \dim \mathrm{E} - \deg \pi_{\mathrm{M}^\top}$$

et d'après le théorème du rang $\qquad \mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_{\mathrm{M}^\top}$

Enfin, on a $\pi_\mathrm{M}(\mathrm{M}) = 0$ et en transposant cette égalité, on trouve $\pi_\mathrm{M}(\mathrm{M}^\top) = 0$ d'où $\pi_{\mathrm{M}^\top}$ divise π_M et de même π_M divise $\pi_{\mathrm{M}^\top}$ par symétrie des rôles entre M et $\mathrm{M}^\top$. Les polynômes minimaux π_M et $\pi_{\mathrm{M}^\top}$ sont associés, unitaires d'où $\pi_\mathrm{M} = \pi_{\mathrm{M}^\top}$ et on conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_\mathrm{M}}$$

3.(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\deg \pi_\mathrm{A} = n$. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{A}) = n$. Notant $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ les bases canoniques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, il existe une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ extraite de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\mathrm{d}f(\mathrm{A})$. Soit I la plage d'indices d'extraction des colonnes. On considère $\Phi : \mathrm{M} \to \det\left(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\mathrm{d}f(\mathrm{M})\right)_{(i,j)\in \mathrm{I}\times[\![1\,;n]\!]}$. L'ensemble $\mathrm{U} = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue avec $\mathrm{A} \in \mathrm{U}$ et tout élément de U est de rang supérieur ou égal à n et donc égal à n. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dont le polynôme minimal est de degré } n \text{ est un ouvert.}}$$

Exercice 4 (****)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente. Établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Corrigé : On rappelle l'inégalité arithmético-géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}_+^n \qquad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

qui s'obtient, par exemple, avec l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction concave ln. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad b_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} = n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

On a
$$\prod_{k=1}^{n} b_k = (n+1)^n$$

et à nouveau par concavité de ln $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad b_n \leqslant n\mathrm{e}$

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à $(a_k b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (n+1)\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k b_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

D'où pour N entier non nul

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{n(n+1)} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} \frac{a_k b_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k b_k \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)}$$

On remarque
$$\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{k} - \frac{1}{\mathrm{N}+1} \leqslant \frac{1}{k}$$

d'où
$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{a_k b_k}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}\, a_k$$

Faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, on conclut

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

Remarque : Il s'agit de l'inégalité de *Carleman*.

Exercice 5 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 1 mais pas d'ordre 2. On se propose de démontrer que la loi faible des grands nombres a toujours lieu.

Pour k et n entiers non nuls, on pose

$$\mathrm{Y}_{k,n} = \mathrm{X}_k \mathbb{1}_{|\mathrm{X}_k|\leqslant n} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_{k,n}$$

1. Montrer $$\frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
2. Établir $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \neq \mathrm{T}_n) \leqslant n\mathbb{P}(|\mathrm{X}_1| > n)$$
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer $$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n))\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{T}_n)}{(\varepsilon n)^2} + n\mathbb{P}(|\mathrm{X}_1| > n)$$
4. Soit X variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie. Montrer $$\frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathrm{X}^2\mathbb{1}_{|\mathrm{X}|\leqslant n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
5. Démontrer la loi faible des grands nombres pour la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$.

Corrigé : L'ensemble $\mathrm{X}_1(\Omega)$ n'est pas fini sans quoi la variable X_1 serait d'espérance finie. On note $\mathrm{X}_1(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ avec les x_k deux à deux distincts et on remarque pour la suite que pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, on a $|\mathrm{X}_1\mathbb{1}_\mathrm{A}| \leqslant |\mathrm{X}_1|$ d'espérance finie par comparaison.

1. Soit n entier non nul. Par linéarité de l'espérance et égalité en loi, on a

$$\frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{k,n} - \mathrm{X}_k) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(\mathrm{X}_k\mathbb{1}_{\mathrm{X}_k>n}) = -\mathbb{E}(\mathrm{X}_1\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_1|>n})$$

Par transfert, il vient $$\frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)\right) = -\sum_{k=0}^{+\infty} x_k\mathbb{1}_{|x_k|>n}\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = x_k)$$

On pose $$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_k(n) = x_k\mathbb{1}_{|x_k|>n}\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = x_k)$$

On a $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|u_k\|_\infty \leqslant |x_k|\,\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = x_k)$$

ce qui prouve la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum u_k$. Puis, on a $u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour k entier et par double limite, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Et on conclut $$\boxed{\frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

2. Soit n entier. On a $$\{\mathrm{S}_n \neq \mathrm{T}_n\} \subset \bigcup_{k=1}^{n}\{\mathrm{Y}_{k,n} \neq \mathrm{X}_k\} = \bigcup_{k=1}^{n}\{|\mathrm{X}_k| > n\}$$

D'après l'inégalité de Boole, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \neq \mathrm{T}_n) \leqslant n\mathbb{P}(|\mathrm{X}_1| > n)}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$, n entier non nul et

$$\mathrm{A}_{n,\varepsilon} = \left\{ \left| \frac{1}{n} (\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)) \right| \geqslant \varepsilon \right\}$$

La famille $(\{\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n\}, \{\mathrm{S}_n \neq \mathrm{T}_n\})$ constituant un système complet d'événements, on trouve

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)) \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_{n,\varepsilon} \cap \{\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n\}\right) + \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_{n,\varepsilon} \cap \{\mathrm{S}_n \neq \mathrm{T}_n\}\right)$$

Observant
$$\mathrm{A}_{n,\varepsilon} \cap \{\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n\} \subset \left\{ \left| \frac{1}{n} (\mathrm{T}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)) \right| \geqslant \varepsilon \right\}$$

il s'ensuit

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)) \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} (\mathrm{T}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)) \right| \geqslant \varepsilon \right) + \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \neq \mathrm{T}_n)$$

La variable aléatoire T_n est bornée comme somme finie de telles variables et admet donc un moment d'ordre 2. Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} (\mathrm{T}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)) \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{T}_n)}{(\varepsilon n)^2}$$

et combinée avec l'inégalité établie dans question précédente, on conclut

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)) \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{T}_n)}{(\varepsilon n)^2} + n\mathbb{P}(|\mathrm{X}_1| > n)}$$

4. Soit n entier non nul. Par transfert, il vient

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathrm{X}^2 \mathbb{1}_{|\mathrm{X}| \leqslant n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x_k| \, \mathbb{1}_{|x_k| \leqslant n}}{n} \, |x_k| \, \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

On pose
$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad v_k(n) = \frac{|x_k| \, \mathbb{1}_{|x_k| \leqslant n}}{n} \, |x_k| \, \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

On a
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|v_k\|_\infty \leqslant |x_k| \, \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

ce qui prouve la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum v_k$. Puis, on a $v_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour k entier et par double limite, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi
$$\boxed{\frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathrm{X}^2 \mathbb{1}_{|\mathrm{X}| \leqslant n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

5. Soit n entier non nul. Par indépendance des $\mathrm{Y}_{k,n}$ puis relation de König-Huygens, il vient

$$\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_{k,n} \right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{Y}_{k,n}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{Y}_{k,n}^2) = n\mathbb{E}(\mathrm{X}_1^2 \mathbb{1}_{|\mathrm{X}_1| \leqslant n})$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)) \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{X}_1^2 \mathbb{1}_{|\mathrm{X}| \leqslant n})}{n\varepsilon^2} + n\mathbb{P}(|\mathrm{X}_1| > n)$$

En observant
$$n \mathbb{1}_{|\mathrm{X}_1| > n} \leqslant |\mathrm{X}_1| \, \mathbb{1}_{|\mathrm{X}_1| > n}$$

il vient $$n\mathbb{P}(|\mathrm{X}_1| > n) \leqslant \mathbb{E}\left(|\mathrm{X}_1|\,\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_1|>n}\right)$$

Avec les notations de la première question, on a par double limite

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'où $$\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}_1|\,\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_1|>n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Il en résulte $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n))\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Enfin, on a par inégalité triangulaire

$$\left|\frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n))\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)\right| + \left|\frac{1}{n}(\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)\right|$$

d'où, pour $\varepsilon > 0$

$$\left\{\left|\frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n))\right| \geqslant \varepsilon\right\} \subset \left\{\left|\frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\left|\frac{1}{n}(\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

On obtient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n))\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

On conclut $$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n))\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$