ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille de révisions n°6

Exercice 1 (**)

Soit E préhilbertien réel. Pour $(u_1,\ldots,u_n)\in \mathrm{E}^n$, on note $\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_n)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G}(u_1,\ldots,u_n)=\big(\langle u_i,u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{E}^n$ libre et $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\,(x_1,\ldots,x_n)$.

Établir $$\forall x\in \mathrm{E}\qquad \mathrm{d}(x,\mathrm{F})^2=\frac{\det \mathrm{G}(x,x_1,\ldots,x_n)}{\det \mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n)}$$

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E}=\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique puis soient $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, B et X_0 dans E. Pour $u\in\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, on considère le problème de Cauchy

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases}\mathrm{X}'=\mathrm{AX}+\mathrm{B}u(t)\\ \mathrm{X}(0)=\mathrm{X}_0\end{cases}$$

Pour X la solution de ce problème de Cauchy, on note $\Phi(u)=\mathrm{X}(1)$. On dit que le système (S) régi par le problème de Cauchy est *contrôlable* si l'application $\Phi:\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})\to\mathrm{E}$ est surjective. On pose

$$\forall u\in\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})\qquad \Psi(u)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}u(s)\,\mathrm{d}s$$

et le *gramien* $$\mathrm{G}=\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}\mathrm{B}^\top\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^\top s}\,\mathrm{d}s$$

1. Pour $u\in\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, déterminer une expression de $\Phi(u)$.
2. Montrer $$\Phi \text{ surjective} \iff \Psi \text{ surjective}$$
3. On suppose le gramien G inversible et pour $\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose
$$\forall s\in[\,0\,;1\,]\qquad u(s)=\mathrm{B}^\top\mathrm{e}^{\mathrm{A}^\top s}\mathrm{X}$$
   (a) Déterminer $\Psi(u)$.
   (b) En déduire que le système (S) est contrôlable.
4. On suppose le gramien G non inversible.
   (a) Justifier qu'il existe $\mathrm{X}\in\mathrm{E}\smallsetminus\{0\}$ tel que $\mathrm{X}^\top\mathrm{G}\mathrm{X}=0$.
   (b) En déduire $$\forall s\in[\,0\,;1\,]\qquad \big\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B},\mathrm{X}\big\rangle=0$$
   (c) Montrer
$$\forall u\in\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})\qquad \langle\Psi(u),\mathrm{X}\rangle=\int_0^1\big\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B},\mathrm{X}\big\rangle\,u(s)\,\mathrm{d}s$$
   (d) En déduire que le système (S) n'est pas contrôlable.
5. Conclure $$\text{le système (S) est contrôlable} \iff \mathrm{G}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 3 (***)

Soit n entier non nul et $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ et de la norme euclidienne associée. On pose $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad f(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^2) & \dots & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^n)\end{pmatrix}$$

1. (a) Établir $\qquad \forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$

   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad |\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})| \leqslant \alpha \|\mathrm{A}\|$$

2. Montrer que f est différentiable et déterminer $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

3. (a) Montrer $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_{\mathrm{M}}$

   (b) En déduire que l'ensemble des matrices de E dont le polynôme minimal est de degré n est un ouvert de E.

Exercice 4 (****)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente. Établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Exercice 5 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 1 mais pas d'ordre 2. On se propose de démontrer que la loi faible des grands nombres a toujours lieu.

Pour k et n entiers non nuls, on pose

$$\mathrm{Y}_{k,n} = \mathrm{X}_k \mathbb{1}_{|\mathrm{X}_k| \leqslant n} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_{k,n}$$

1. Montrer $\qquad \dfrac{1}{n}\left(\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2. Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \neq \mathrm{T}_n) \leqslant n\mathbb{P}(|\mathrm{X}_1| > n)$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n))\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{T}_n)}{(\varepsilon n)^2} + n\mathbb{P}(|\mathrm{X}_1| > n)$$

4. Soit X variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie. Montrer

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathrm{X}^2 \mathbb{1}_{|\mathrm{X}| \leqslant n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

5. Démontrer la loi faible des grands nombres pour la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$.