

### III Synthèse d'une loi de commande pour l'exosquelette

#### III.A – Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

**Q 26.** Exprimer littéralement, au point  $G_2$  et dans le repère  $R_1$ , le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe  $R_0$  supposé galiléen :  $\{D(\text{Avant-bras}/R_0)\}_{G_2, (x_1, y_1, z_1)}$ .

$$\{D_{AB/R_0}\} = \{D_{2/0}\} = \left. \begin{matrix} m_2 \vec{a}(G_2, 2/0) \\ \vec{\delta}_{G_2}(2/0) \end{matrix} \right\}_{G_2}$$

$$\vec{V}(G_2, 2/0) = l_1 \dot{\gamma} \vec{x}_1 + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \delta) \vec{x}_2$$

$$\vec{a}(G_2, 2/0) = l_1 \ddot{\gamma} \vec{x}_1 - l_1 \dot{\gamma}^2 \vec{z}_1 + \lambda_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \vec{x}_2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \delta)^2 \vec{z}_2$$

$$m_2 \vec{a}(G_2, 2/0) = m_2 \cdot \left. \begin{matrix} l_1 \ddot{\gamma} + \lambda_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \delta)^2 \sin \delta \\ 0 \\ -l_1 \dot{\gamma}^2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \delta) \sin \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \delta)^2 \cos \delta \end{matrix} \right\}_{R_1}$$

$$\vec{\delta}_{G_2}(2/0) = [I_{G_2}(2)] \vec{\Omega}(2/0) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R_2} \cdot \left. \begin{matrix} 0 \\ \dot{\gamma} + \delta \\ 0 \end{matrix} \right\}_{R_2 \text{ ou } R_1} = \left. \begin{matrix} 0 \\ B_2 \cdot (\dot{\gamma} + \delta) \\ 0 \end{matrix} \right\}_{R_2 \text{ ou } R_1}$$

$$\vec{\delta}_{G_2}(2/0) = \left( \frac{d\vec{\delta}_{G_2}(2/0)}{dt} \right)_0 = B_2 \cdot (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \vec{y}_1$$

**Q 27.** Le Principe Fondamental de la Dynamique permet d'établir la relation suivante (admise) :

$$C_1(t) + l_1 X_F \cos \gamma - l_1 Z_F \sin \gamma + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_1 m_1 g \sin \gamma - l_1 m_2 g \sin \gamma - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) = B_1 \ddot{\gamma} + \dot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1^2 + 2 m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \delta)^2 + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2$$

Détailler (**sans calcul**) la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

- On isole l'ensemble {bras (1) + Avant-Bras (2)}.
- BAME :

$$\{T(\text{bâti} \rightarrow 1)\} = \left. \begin{matrix} X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1 + Z_1 \vec{z}_1 \\ L_1 \vec{x}_1 + M_1 \vec{y}_1 + N_1 \vec{z}_1 \end{matrix} \right\} \text{ avec } M_1=0 \text{ si liaison pivot parfaite ;}$$

$$\{T(\text{actionneur } 1 \rightarrow 1)\} = \left. \begin{matrix} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{matrix} \right\};$$

$$\{T(\text{force} \rightarrow 2)\} = \left. \begin{matrix} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\};$$

$$\{T(\text{pesanteur} \rightarrow 1)\} = \left. \begin{matrix} m_1 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_1};$$

$$\{T(\text{pesanteur} \rightarrow 2)\} = \left. \begin{matrix} m_2 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_2};$$

- On écrit le Théorème du moment dynamique en 0 selon la direction  $\vec{y}$  :

$$C_1(t) + 0 + (\vec{OB} \wedge (X_F \vec{x} + Z_F \vec{z}) + \vec{OG}_1 \wedge m_1 g \vec{z} + \vec{OG}_2 \wedge m_2 g \vec{z}) \cdot \vec{y} = \vec{\delta}_0(1/0) \cdot \vec{y} + \vec{\delta}_0(2/0) \cdot \vec{y}$$

Compléments au corrigé : Détails du calcul (**non demandé**) :

$$\vec{OB} = l_1 \vec{z}_1 + l_2 \vec{z}_2 ; \vec{OG}_1 = \lambda_1 \vec{z}_1 ; \vec{OG}_2 = l_1 \vec{z}_1 + \lambda_2 \vec{z}_2 ;$$

$$\vec{\delta}_0(2/0) = \vec{\delta}_{G_2}(2/0) + \vec{OG}_2 \wedge m_2 \vec{a}(G_2, 2/0)$$

$$\vec{\delta}_0(2/0) \cdot \vec{y} = B_2(\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) + \left( \begin{array}{c|c} \lambda_2 \sin \delta & l_1 \ddot{\gamma} + \lambda_2(\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \cos \delta - \lambda_2(\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \sin \delta \\ 0 & 0 \\ \hline l_1 + \lambda_2 \cos \delta & -l_1 \dot{\gamma}^2 - \lambda_2(\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta - \lambda_2(\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \cos \delta \end{array} \right) \wedge m_2 \vec{y}$$

$$= \ddot{\gamma}(B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta}(B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2$$

$$\vec{\delta}_0(1/0) = \vec{\delta}_{G_1}(1/0) + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 \vec{a}(G_1, 2/0)$$

$$\vec{\delta}_0(1/0) \cdot \vec{y} = B_1 \ddot{\gamma} + \left( \begin{array}{c|c} 0 & l_1 \ddot{\gamma} \\ 0 & 0 \\ \hline l_1 & -l_1 \dot{\gamma}^2 \end{array} \right) \wedge m_1 \vec{y} = (B_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\gamma}$$

Soit :  $C_1(t) + l_1 X_F \cos \gamma - l_1 Z_F \sin \gamma + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_1 m_1 g \sin \gamma - l_1 m_2 g \sin \gamma - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) = (B_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\gamma} + \ddot{\gamma}(B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta}(B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2$

**Q 28.** Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, **indépendante** de la précédente, faisant intervenir le couple  $C_2(t)$ , et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes  $L_1$ ,  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $L_2$ ,  $M_2$ ,  $N_2$  des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que ci-dessus.

- On isole l'Avant-Bras (2).

- BAME :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_2 \vec{x}_1 + Y_2 \vec{y}_1 + Z_2 \vec{z}_1 \\ L_2 \vec{x}_1 + M_2 \vec{y}_1 + N_2 \vec{z}_1 \end{Bmatrix} \text{ avec } M_2=0 \text{ si liaison pivot parfaite ;}$$

$$\{T(\text{actionneur } 2 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{T(\text{force } \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{T(\text{pesanteur } \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} m_2 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ;$$

- On écrit le Théorème du moment dynamique en A selon la direction  $\vec{y}$  :

$$C_2(t) + 0 + (\overrightarrow{AB} \wedge (X_F \vec{x} + Z_F \vec{z}) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 g \vec{z}) \cdot \vec{y} = \vec{\delta}_A(2/0) \cdot \vec{y}$$

- Détails du calcul :

$$\overrightarrow{AB} = l_2 \vec{z}_2 ; \overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \vec{z}_2 ;$$

$$\vec{\delta}_A(2/0) = \vec{\delta}_{G_2}(2/0) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 \vec{a}(G_2, 2/0)$$

$$\text{avec } \vec{a}(G_2, 2/0) = l_1 \ddot{\gamma} \vec{x}_1 - l_1 \dot{\gamma}^2 \vec{z}_1 + \lambda_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \vec{x}_2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \vec{z}_2$$

$$\vec{\delta}_A(2/0) \cdot \vec{y} = B_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \vec{y} + \begin{array}{c|c} 0 & l_1 \ddot{\gamma} \cos \delta + l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta + \lambda_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \\ 0 & 0 \\ \hline \lambda_2 & l_1 \ddot{\gamma} \sin \delta - l_1 \dot{\gamma}^2 \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \end{array} \wedge m_2 \vec{y}$$

$$= B_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) + m_2 \lambda_2 (l_1 \ddot{\gamma} \cos \delta + l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta + \lambda_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}))$$

Soit :

$$C_2(t) + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) = \ddot{\gamma}(B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta}(B_2 + m_2 \lambda_2^2) + m_2 l_1 \lambda_2 \sin \delta \dot{\gamma}^2$$

**Q 29.** En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$$

où  $C$  est un vecteur et  $A$ ,  $B$  et  $Q$  sont des matrices  $2 \times 2$ , que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement  $(\gamma, \delta)$  et de leurs dérivées premières  $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$ .

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la

forme matricielle  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$  avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin \gamma + l_1 m_2 g \sin \gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta \\ m_2 l_1 \lambda_2 \sin \delta \dot{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 l_1 \lambda_2 \sin \delta \dot{\gamma} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 l_1 \lambda_2 \sin \delta \dot{\gamma} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \gamma - l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta) \\ -l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_2 \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas **statique** (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données  $(C_1(t), C_2(t), X_F, Z_F)$  sont indépendantes du temps.

**Q 30.** Calculer les couples  $(C_1, C_2)$  exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras}  $(X_F = 0, Z_F = 0)$  ; discuter de la configuration angulaire la plus **défavorable** vis-à-vis du cahier des charges.

On se place ici en statique, donc  $\ddot{\gamma} = \ddot{\delta} = 0$  et  $\dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$

Si  $X_F = Z_F = 0$  alors on obtient :

$$\boxed{C_{1,pes} = (\lambda_1 m_1 + l_1 m_2) g \sin \gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta)}$$

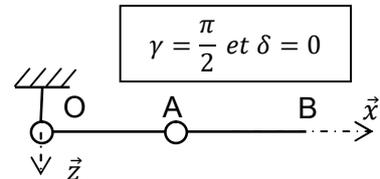
Et

$$\boxed{C_{2,pes} = \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta)}$$

La configuration la plus défavorable correspond donc à  $\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}$  et  $\gamma = \frac{\pi}{2}$

Soit la configuration  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  et  $\delta = 0$  pour laquelle :

$$\boxed{C_{1,pes max} = (\lambda_1 m_1 + l_1 m_2 + \lambda_2 m_2) g; C_{2,pes max} = \lambda_2 m_2 g}$$



Application Numérique :

$$C_{1,pes max} = (0,05.2,3 + 0,35.0,3 + 0,135.0,3) . 9,81 = 2,55 N . m;$$

$$C_{2,pes max} = 0,135.0,3.9,81 = 0,4 N . m$$

Le cahier des charges est respecté (couples inférieurs à 50 Nm).

**Q 31.** Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique **maximale** peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

Hypothèses :

- $\ddot{\gamma} = \ddot{\delta} = 0$  et  $\dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$  (statique)
- $\gamma = \frac{\pi}{2}$  et  $\delta = 0$  (configuration la plus défavorable)

$$C_{1,stat max} = (l_1 + l_2) Z_F + C_{1,pes max} \text{ et } C_{2,stat max} = l_2 Z_F + C_{2,pes max}$$

Le couple statique maximal est limité à  $C_{1,stat max} = 50 N.m$  soit :

$$Z_{F,max} = \frac{C_{1,stat max} - C_{1,pes max}}{l_1 + l_2} = \frac{C_{1,stat max} - C_{1,pes max}}{l_1 + l_2} = \frac{50 - 2,55}{0,35 + 0,27} \text{ soit } \boxed{Z_{F,max} = 76,5 N}$$

Le cahier des charges est respecté (effort de manipulation maximal du patient 50 N.m)

### III.B – Synthèse d'une loi de commande « deux axes »

**Q 32.** Donner au moins un argument, en particulier vis-à-vis du cahier des charges souhaité, de l'intérêt de la boucle interne correspondant à la loi non linéaire donnée précédemment.

La boucle interne permet :

- de compenser le couple statique déterminé précédemment ;
- d'obtenir une loi de comportement  $q(U)$  linéaire

En utilisant la loi correspondant à la boucle interne, le modèle dynamique peut-être réécrit selon la forme  $\ddot{q} = \mathbf{U} + \mathbf{N}(q, \dot{q}, \mathbf{F})$  avec  $\mathbf{N}(q, \dot{q}, \mathbf{F}) = \mathbf{M}(q, \dot{q}) \cdot \mathbf{F}$

**Q 33.** Préciser l'expression de la matrice  $\mathbf{M}$  en fonction de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{Q}$ .

On a vu précédemment que l'équation dynamique de l'exosquelette se mettait sous la forme :

$$\mathbf{C}_a = \mathbf{A}(q, \dot{q})\ddot{q} + \mathbf{B}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q}) + \mathbf{Q}(q, \dot{q})\mathbf{F}$$

La boucle interne calcule les couples aux axes par la relation :

$$\mathbf{C}_a = \mathbf{A}(q, \dot{q})\mathbf{U} + \mathbf{B}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})$$

Donc  $\mathbf{A}(q, \dot{q})\ddot{q} + \mathbf{Q}(q, \dot{q})\mathbf{F} = \mathbf{A}(q, \dot{q})\mathbf{U}$  soit  $\ddot{q} = \mathbf{A}^{-1}(q, \dot{q}) \cdot \mathbf{Q}(q, \dot{q})\mathbf{F} + \mathbf{U}$

$$\mathbf{M}(q, \dot{q}) = \mathbf{A}^{-1}(q, \dot{q}) \cdot \mathbf{Q}(q, \dot{q})$$

**Q 34.** Donner, par exemple sous forme algorithmique, une démarche permettant de linéariser le modèle dynamique selon la forme  $\ddot{q}_1 = \tilde{\mathbf{A}}q_1 + \tilde{\mathbf{B}}\dot{q}_1 + \tilde{\mathbf{G}}u + \tilde{\mathbf{H}}f$  où  $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{G}}$  et  $\tilde{\mathbf{H}}$  sont des matrices constantes, éventuellement dépendantes du point de fonctionnement.

La linéarisation est obtenue par un développement en série autour d'un point de fonctionnement donné :

Hypothèses :

Si on note  $q_1 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}$  les petites variations de  $q = \begin{pmatrix} Y \\ \delta \end{pmatrix}$  autour du point de fonctionnement  $q_0 = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix}$ , alors  $q = q_0 + q_1$ .

De même  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{f}$  avec  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix}$  les petites variations de  $\mathbf{F}$  autour du point de fonctionnement

$$\mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$$

Et  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}$  avec  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  les petites variations de  $\mathbf{U}$  autour du point de fonctionnement  $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix}$

D'après la question 33,  $\ddot{q} = \mathbf{N}(q, \dot{q}, \mathbf{F}) + \mathbf{U}$

En régime permanent :

Au point de fonctionnement on a  $\mathbf{0} = \mathbf{N}(q_0, 0, \mathbf{F}_0) + \mathbf{U}_0$  (1)

Linéarisation :

$$\ddot{q}_1 = \mathbf{N}(q_0 + q_1, 0 + \dot{q}_1, \mathbf{F}_0) + \mathbf{U}_0 + \mathbf{u} \quad (2)$$

Avec  $\mathbf{N}(q_0 + q_1, 0 + \dot{q}_1, \mathbf{F}_0) = \mathbf{A}^{-1}(q_0 + q_1, \dot{q}_1) \cdot \mathbf{Q}(q_0 + q_1, \dot{q}_1) (\mathbf{F}_0 + \mathbf{f})$

Rappels :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 l_1 l_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 \\ B_2 + m_2 l_1 l_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 \lambda_2^2 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \gamma - l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta) \\ -l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_2 \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix} \quad (\text{question 29})$$

On linéarise ensuite  $\mathbf{N}(q, \dot{q}, \mathbf{F}) = \mathbf{M}(q, \dot{q})\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{N}(q_0 + q_1, 0 + \dot{q}_1, \mathbf{F}_0) = \mathbf{N}(q_0, 0, \mathbf{F}_0) + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{q}}(q_0, 0, \mathbf{F}_0)q_1 + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(q_0, 0, \mathbf{F}_0)\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}}}(q_0, 0, \mathbf{F}_0)\mathbf{f} \quad (3)$$

Par (1), (2) et (3), on obtient :

$$\text{Donc } \ddot{q}_1 = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{q}}(q_0, 0, \mathbf{F}_0)q_1 + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(q_0, 0, \mathbf{F}_0)\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}}}(q_0, 0, \mathbf{F}_0)\mathbf{f} + \mathbf{u}$$

On obtient :

$$\ddot{q}_1 = \tilde{A}q_1 + \tilde{B}\dot{q}_1 + \tilde{G}u + \tilde{H}f \quad \text{avec : } \tilde{A} = \frac{\partial N}{\partial q}(q_0, 0, F_0); \tilde{B} = \frac{\partial N}{\partial \dot{q}}(q_0, 0, F_0); \tilde{G} = \mathbf{1}_{2 \times 2}; \tilde{H} = \mathbf{M}(q_0, 0)$$

**Q 35.** En justifiant la réponse, étudier la stabilité du modèle donné ci-dessus.

Les sorties  $\dot{\gamma}_1$  et  $\dot{\delta}_1$  sont donc régies par le système d'équations :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = -18,4\gamma_1 - 33\delta_1 + u_1 - 3,9z_F \\ \dot{\delta}_1 = 4\gamma_1 - 56,5\delta_1 + u_2 - 45,4z_F \end{cases} \quad \text{soit dans le domaine de Laplace :}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(p)(p^2 + 18,4) + 33\delta_1(p) = u_1(p) - 3,9z_F(p) \\ -4\gamma_1(p) + (p^2 + 56,5)\delta_1(p) = u_2(p) - 45,4z_F(p) \end{cases}$$

$$\gamma_1(p) = \frac{(u_1(p) - 3,9z_F(p))(p^2 + 56,5) - (u_2(p) - 45,4z_F(p))33}{(p^2 + 18,4)(p^2 + 56,5) + 4,33}$$

$$\delta_1(p) = \frac{(u_2(p) - 45,4z_F(p))(p^2 + 18,4) + 4(u_1(p) - 3,9z_F(p))}{(p^2 + 18,4)(p^2 + 56,5) + 4,33}$$

$$\gamma_1(p) = \frac{u_1(p)(p^2 + 56,5) - 33u_2(p) + z_F(p)(-3,9(p^2 + 56,5) + 45,4,33)}{(p^2 + 18,4)(p^2 + 56,5) + 4,33}$$

$$\delta_1(p) = \frac{4u_1(p) + u_2(p)(p^2 + 18,4) - z_F(p)(45,4(p^2 + 18,4) + 4,3,9)}{(p^2 + 18,4)(p^2 + 56,5) + 4,33}$$

Une condition nécessaire pour que le système soit stable est que les coefficients du polynôme du dénominateur soient tous strictement de même signe. Or ici les coefficients de  $p^3$  et  $p$  sont nuls.

Ce modèle n'est donc pas stable.

**Q 36.** En utilisant un raisonnement qualitatif (**sans calcul**), et en supposant que le système bouclé est stable, justifier qu'une régulation de type proportionnelle-intégrale (sur chaque composante des positions du bras) :

$$\frac{u_1(p)}{\varepsilon_1(p)} = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \quad \text{et} \quad \frac{u_2(p)}{\varepsilon_2(p)} = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_2 p}\right)$$

où  $\varepsilon_1(t) = \gamma_{1ref} - \gamma_1$  et  $\varepsilon_2(t) = \delta_{1ref} - \delta_1$  sont les écarts sur chaque axe d'articulation étudié, ne permet pas d'assurer l'objectif escompté, c'est-à-dire un comportement de type raideur entre les variations des positions  $\gamma_1$  et  $\delta_1$ , du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $z_F$  exercée par le patient.

Raisonnement « qualitatif » :

Avec des correcteurs de type « Proportionnel Intégral », les erreurs statiques en réponse à un échelon sont nulles.

Donc pour un échelon d'effort  $z_F(p) = \frac{\Delta Z}{p}$ , si l'on suppose le système stable, on obtient des positions nulles en régime permanent, ce qui correspondrait à une raideur infinie, ce qui ne correspond pas au comportement escompté.

Compléments (Explications « plus détaillées ») :

$$\gamma_1(p)(p^2 + 18,4) + 33\delta_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) (\gamma_{1ref}(p) - \gamma_1(p)) - 3,9z_F(p)$$

$$-4\gamma_1(p) + (p^2 + 56,5)\delta_1(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_2 p}\right) (\delta_{1ref}(p) - \delta_1(p)) - 45,4z_F(p)$$

Soit, si on suppose  $\gamma_{1ref}(p) = \delta_{1ref}(p) = 0$  (on étudie le comportement vis-à-vis d'un effort extérieur  $z_F$ ) :

$$\gamma_1(p) \left( p^2 + 18,4 + K_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \right) + 33\delta_1(p) = -3,9z_F(p)$$

$$-4\gamma_1(p) + \left( p^2 + 56,5 + K_2 \left(1 + \frac{1}{T_2 p}\right) \right) \delta_1(p) = -45,4z_F(p)$$

$$\gamma_1(p) (T_1 p^3 + 18,4 T_1 p + K_1(1 + T_1 p)) + 33 T_1 p \delta_1(p) = -3,9 T_1 p z_F(p)$$

$$-4 T_2 p \gamma_1(p) + (T_2 p^3 + 56,5 T_2 p + K_2(1 + T_2 p)) \delta_1(p) = -45,4 T_2 p z_F(p)$$

$$\text{Si } z_F(p) = \frac{\Delta Z}{p} \text{ alors, } \begin{cases} \lim_{p \rightarrow 0} (T_1 p^3 \gamma_1(p) + 18,4 T_1 p \gamma_1(p) + K_1 \gamma_1(p) + K_1 T_1 p \gamma_1(p) + 33 T_1 p \delta_1(p)) = -3,9 T_1 \Delta Z \\ \lim_{p \rightarrow 0} (-4 T_2 p \gamma_1(p) + T_2 p^3 \delta_1(p) + 56,5 T_2 p \delta_1(p) + K_2 \delta_1(p) + T_2 p \delta_1(p)) = -45,4 T_2 \Delta Z \end{cases}$$

En posant les valeurs en régime permanent  $\Delta\gamma = \lim_{p \rightarrow 0} p\gamma_1(p)$  et  $\Delta\delta = \lim_{p \rightarrow 0} p\delta_1(p)$ , valeurs angulaires induites par l'échelon d'effort  $\Delta Z$ , on trouve donc que  $\lim_{p \rightarrow 0} \gamma_1(p) = cte \text{ finie}$  donc que  $\Delta\gamma = 0$  et  $\Delta\delta = 0$ .

On obtient donc avec ce type de correcteur une raideur infinie, ce qui ne correspond pas au comportement escompté.

Pour la suite, on adopte la loi de commande :  $u(t) = \mathbf{K}_p(q_{1ref} - q_1) + \mathbf{K}_v(\dot{q}_{1ref} - \dot{q}_1)$  avec :

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} k_{p1} & k_{p12} \\ k_{p21} & k_{p2} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} k_{v11} & k_{v12} \\ k_{v21} & k_{v2} \end{bmatrix}$$

Par souci de simplicité, on pourra utiliser  $q_{1ref} = 0$  et  $\dot{q}_{1ref} = 0$ .

**Q 37.** Déterminer les coefficients des matrices  $\mathbf{K}_p$  et  $\mathbf{K}_v$  afin que le comportement entrée-sortie entre les positions du bras et de l'avant bras, et les forces exercées par le patient, soit celui de fonctions du deuxième ordre :  $\frac{\gamma_1(p)}{z_F(p)} = \frac{K_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_1}p + \frac{p^2}{\omega_1^2}}$  et  $\frac{\delta_1(p)}{z_F(p)} = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_2}p + \frac{p^2}{\omega_2^2}}$  permettant d'obtenir les valeurs des raideurs souhaitées et caractérisées par un coefficient d'amortissement  $\xi = 0,7$ . Justifier alors que la bande passante ne peut pas être choisie d'une manière arbitraire.

Ici on a, sachant que  $q_{1ref} = 0$  et  $\dot{q}_{1ref} = 0$  :

$$\begin{cases} u_1(p) = -(k_{p11} + pk_{v11})\gamma_1(p) - (k_{p12} + pk_{v12})\delta_1(p) \\ u_2(p) = -(k_{p21} + pk_{v21})\gamma_1(p) - (k_{p22} + pk_{v22})\delta_1(p) \end{cases}$$

De plus on a trouvé question 35 :

$$\begin{cases} \gamma_1(p)(p^2 + 18,4) + 33\delta_1(p) = u_1(p) - 3,9z_F(p) \\ -4\gamma_1(p) + (p^2 + 56,5)\delta_1(p) = u_2(p) - 45,4z_F(p) \end{cases}$$

On peut donc relier les déplacements à l'effort extérieur :

$$\begin{cases} \gamma_1(p)(p^2 + 18,4 + k_{p11} + pk_{v11}) + (33 + k_{p12} + pk_{v12})\delta_1(p) = -3,9z_F(p) \\ (-4 + k_{p21} + pk_{v21})\gamma_1(p) + (p^2 + 56,5 + k_{p22} + pk_{v22})\delta_1(p) = -45,4z_F(p) \end{cases}$$

Si l'on choisit :  $k_{p12} = -33$ ,  $k_{v12} = 0$ ,  $k_{p21} = 4$ ,  $k_{v21} = 0$ , on obtient alors :

$$\frac{\gamma_1(p)}{z_F(p)} = \frac{-3,9}{p^2 + pk_{v11} + 18,4 + k_{p11}} \text{ et } \frac{\delta_1(p)}{z_F(p)} = \frac{-45,4}{p^2 + pk_{v22} + 56,5 + k_{p22}}$$

Le « comportement entrée-sortie » entre les déplacements et les efforts extérieurs est donc celui d'un deuxième ordre :

- De gains statiques  $G_1 = \frac{-3,9}{18,4 + k_{p11}}$  et  $G_2 = \frac{-45,4}{56,5 + k_{p22}}$
- De pulsations propres  $\omega_1 = \sqrt{18,4 + k_{p11}}$  et  $\omega_2 = \sqrt{56,5 + k_{p22}}$
- De coefficients d'amortissement  $\xi_1 = \frac{k_{v11}}{2\sqrt{18,4 + k_{p11}}}$  et  $\xi_2 = \frac{k_{v22}}{2\sqrt{56,5 + k_{p22}}}$

Le cahier des charges impose les raideurs :  $\left| \frac{\Delta Z_F}{\Delta \gamma} \right| = K_1 \geq 500 \text{ N.rad}^{-1}$  et  $\left| \frac{\Delta Z_F}{\Delta \delta} \right| = K_2 \geq 500 \text{ N.rad}^{-1}$

Or  $K_1 = \left| \frac{1}{G_1} \right|$  et  $K_2 = \left| \frac{1}{G_2} \right|$  donc  $\left| \frac{18,4 + k_{p11}}{3,9} \right| \geq 500$  et  $\left| \frac{56,5 + k_{p22}}{45,4} \right| \geq 500$

Le gain statique doit être négatif (à un effort vertical positif, dans le sens z, correspond un déplacement angulaire négatif (dans le sens horaire) donc :

$$-\frac{18,4 + k_{p11}}{3,9} \leq -500 \text{ et } -\frac{56,5 + k_{p22}}{45,4} \leq -500$$

$$k_{p11} \geq 500 \cdot 3,9 - 18,4 \text{ et } k_{p22} \geq 500 \cdot 45,4 - 56,5$$

$$k_{p11} \geq 1932 \text{ V/rad et } k_{p22} \geq 22646 \text{ V/rad}$$

Le coefficient d'amortissement impose les valeurs de  $k_{v11}$  et  $k_{v22}$  :

$$k_{v11} = 2\xi\sqrt{18,4 + k_{p11}} = 2 \cdot 0,7\sqrt{18,4 + 1932} = 62 \text{ V/(rad/s)}$$

$$k_{v22} = 2\xi \sqrt{56,5 + k_{p22}} = 2.0,7 \sqrt{56,5 + 22646} = 210 \text{ V}/(\text{rad}/\text{s})$$

On trouve donc:  $K_p = \begin{bmatrix} 1932 & -33 \\ 4 & 22646 \end{bmatrix}$  et  $K_v = \begin{bmatrix} 62 & 0 \\ 0 & 210 \end{bmatrix}$

Les valeurs des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont imposées par les valeurs de  $k_{p1}$  et  $k_{p22}$ , elles-mêmes imposées par les raideurs. Ces 2 critères ne sont cependant pas incompatibles puisqu'une augmentation de  $k_{p11}$  et  $k_{p22}$  entraîne une augmentation de la raideur et de la bande passante.

**Q 38.** Les figures 17 et 18 montrent un ensemble de résultats correspondant à deux types d'essais :

- pour le réglage de la loi de commande correspondant à celui de la question 37, la figure 17 montre les évolutions des positions angulaires du bras et de l'avant-bras (à partir du point de fonctionnement  $t(0,6 \ 0,7)$  rad) et des couples sur les axes des articulations, en réponse à une variation intervenant à  $t_0 = 1$  s de la force  $Z_F = \Delta Z_F = -1$  N;
- la figure 18 montre le ralliement à une position de référence avec des efforts constants,  $X_F = 50$  N et  $Z_F = -50$  N en partant de conditions initiales nulles.

Commenter ces courbes et conclure sur l'adéquation de la loi de commande proposée comparativement au cahier des charges.

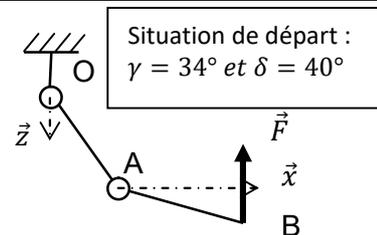
- **Figure 17 :**  
Un échelon d'effort extérieur de 1 N produit un décalage angulaire  $\Delta\gamma=0,018$  rad et  $\Delta\delta=0,02$  rad soit des raideurs :

$$\left| \frac{\Delta Z_F}{\Delta\gamma} \right| = K_1 = 55 \text{ N} \cdot \text{rad}^{-1} \leq 500 \text{ N} \cdot \text{rad}^{-1} \text{ et } \left| \frac{\Delta Z_F}{\Delta\delta} \right| = 50 \text{ N} \cdot \text{rad}^{-1} \leq 500 \text{ N} \cdot \text{rad}^{-1}$$

La raideur est moindre que ce que stipule le cahier des charges.

On observe un léger dépassement ( $\xi \approx 0,7$ )

Partant d'un couple non nul (compensation du poids), ils évoluent pour s'opposer à l'effort extérieur  $Z_F$ .



- **Figure 18 :**  
Les efforts extérieurs sont les efforts maximaux admissibles (50N)  
Le bras et l'avant-bras prennent la position horizontale ( $\gamma = 90^\circ$  et  $\delta = 0^\circ$ ).  
Les couples au démarrage sont importants (150 N.m pour  $C_1$ ) mais restent inférieurs à 4 fois le couple nominal statique comme précisé dans le cahier des charges (page 8 du sujet).  
En régime permanent ils restent inférieurs à la valeur maximale du cahier des charges (50 N.m).

