Feuille d'exercices n°23

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. En déduire que A est diagonalisable.

Corrigé : 1. On décompose

$$\mathrm{A} = \mathrm{U} + \mathrm{V} \quad \text{avec} \quad \mathrm{V} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ n & \ddots & & & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On note u et v endomorphismes de E tels que $\mathrm{U} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} u$ et $\mathrm{V} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} v$ avec $\mathcal{C} = (1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$. On a avec évaluation paresseuse pour rester à valeurs dans E

$$\forall k \in [\![0 ; n]\!] \qquad u(\mathrm{X}^k) = k\mathrm{X}^{k-1} \quad \text{et} \quad v(\mathrm{X}^k) = (n-k)\mathrm{X}^{k+1} = n\mathrm{X} \cdot \mathrm{X}^k - \mathrm{X}^2 \times k\mathrm{X}^{k-1}$$

Par combinaison linéaire, il s'ensuit

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}' \quad \text{et} \quad g(\mathrm{P}) = n\mathrm{XP} - \mathrm{X}^2\mathrm{P}'$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} \varphi \quad \text{avec} \quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{P}) = (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{P}' + n\mathrm{XP}}$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. On a

$$\varphi(\mathrm{P}) = \lambda \mathrm{P} \iff (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{P}' + (n\mathrm{X} - \lambda)\mathrm{P} = 0$$

Considérons l'équation différentielle homogène associée sur $\mathrm{I} =]\, 1 \,; +\infty \,[$

$$(1 - t^2)x' + (nt - \lambda)x = 0 \tag{H}$$

L'ensemble des solutions est $\mathrm{S_H} = \mathrm{Vect}\,(f)$ avec $f : t \mapsto \exp\left(\int^t \dfrac{ns - \lambda}{s^2 - 1}\, \mathrm{d}s\right)$. Par décomposition en éléments simples, on trouve

$$\int^t \frac{ns - \lambda}{s^2 - 1}\, \mathrm{d}s = \int^t \left[\frac{\alpha}{s-1} + \frac{\beta}{s+1}\right] \mathrm{d}s \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{n - \lambda}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\lambda + n}{2}$$

D'où
$$f = t \in \mathrm{I} \mapsto (t-1)^\alpha (1+t)^\beta$$

On cherche des solutions polynomiales. Notons $\alpha = k$ entier, on a $\lambda = n - 2k$ et $\beta = n - k$. On veut β entier également d'où, notant $\mathrm{P}_k = (\mathrm{X}-1)^k(\mathrm{X}+1)^{n-k}$ pour $k \in [\![0\,;\,n]\!]$

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad (1-\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_k' + (n\mathrm{X} - n + 2k)\mathrm{P}_k = 0 \iff \varphi(\mathrm{P}_k) = (n-2k)\mathrm{P}_k$$

Les P_k ne sont pas nuls (de degré égal à n) donc sont vecteurs propres, associés à des valeurs propres distinctes ($k \mapsto n-2k$ injective) et constituent par conséquent une famille libre de cardinal égal à $\dim \mathrm{E}$ donc une base de diagonalisation de φ. Ainsi

$$\boxed{\text{La matrice A est diagonalisable.}}$$

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et on pose $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

1. Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer $\qquad$ A diagonalisable $\iff$ φ diagonalisable
3. Si A diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de φ.

Corrigé : 1. On a φ à valeurs dans E et linéaire par linéarité du produit matriciel à droite. Ainsi

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Par récurrence immédiate, on a $\varphi^k(\mathrm{M}) = \mathrm{A}^k\mathrm{M}$ pour tout k entier et par conséquent, par combinaison linéaire

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(\varphi)(\mathrm{M}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{M}$$

Par suite $\qquad$ P annulateur de $\varphi \iff$ P annulateur de M

Les idéaux de polynômes annulateurs coïncident pour φ et A. On en déduit que $\pi_\varphi = \pi_\mathrm{A}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{A diagonalisable} \iff \varphi \text{ diagonalisable}}$$

3. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. On a pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$

$$\varphi(\mathrm{PE}_{i,j}) = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PE}_{i,j} = \mathrm{PDE}_{i,j} = \mathrm{P}\lambda_i\mathrm{E}_{i,j} = \lambda_i\mathrm{PE}_{i,j}$$

La famille $\mathscr{L} = (\mathrm{PE}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est donc formée de vecteurs propres et on vérifie sans difficulté qu'elle est libre. Comme son cardinal est égal à $n^2 = \dim \mathrm{E}$, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{L} \text{ est une base de vecteurs propres de } \varphi.}$$

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation.

Corrigé : Soit $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_p})$ famille génératrice de $\mathrm{Vect}\,(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$, sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ de dimension finie. Par souci de simplification, on la note abusivement $(u_1, \ldots, u_p)$. On procède ensuite par récurrence sur p. L'initialisation pour $p = 1$ est immédiate. On suppose la propriété vraie au rang $p - 1$ entier non nul. On décompose $\mathrm{E} = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u_p)} \mathrm{E}_\lambda(u_p)$ puis on considère les $u_{i,\lambda}$ induit par u_i sur $\mathrm{E}_\lambda(u_p)$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u_p)$ et $i \in [\![1\,;\,p-1]\!]$. La famille $(u_{i,\lambda})_{1 \leqslant i \leqslant p-1}$ vérifie l'hypothèse de récurrence et par conséquent, il existe $\mathscr{B}_\lambda$ base de diagonalisation commune à tous les $u_{i,\lambda}$ et également à l'endomorphisme induit par u_p sur $\mathrm{E}_\lambda(u_p)$. La base concaténée $\biguplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(u_p)} \mathscr{B}_\lambda$ est alors une base de diagonalisation simultanée. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe une base commune de diagonalisation pour une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.}}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec $u \circ v = v \circ u$ et v nilpotent. Montrer que $\det(u + v) = \det u$.

Corrigé : Si $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, on a $\det(u + v) = \det u \det(\mathrm{id} + u^{-1} \circ v)$ et comme $u^{-1}v$ est nilpotent, on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice soit triangulaire supérieure stricte d'où $\det(\mathrm{id} + u^{-1} \circ v) = \det \mathrm{id} = 1$. Si $u \notin \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, alors Ker u est stable par v d'où un endomorphisme w induit par v sur Ker u. Mais comme v est nilpotent, w l'est aussi donc de noyau non réduit à 0_{E} et un élément non nul du noyau est dans $\mathrm{Ker}\,(u + v)$ d'où $\det(u + v) = 0 = \det u$. Ainsi

$$\boxed{\det(u + v) = \det u}$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. On définit le *commutant* de f par

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \quad | \quad f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer : $\qquad g \in \mathscr{C}(f) \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(f) \qquad \mathrm{E}_\lambda(f)$ stable par g
3. Déterminer $\dim \mathscr{C}(f)$.
4. Si les valeurs propres de f sont simples, montrer que $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Corrigé : 1. L'ensemble $\mathscr{C}(f)$ contient $0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et est stable par combinaison linéaire par linéarité de la composition d'où

$$\boxed{\text{Le commutant } \mathscr{C}(f) \text{ est un sev de } \mathscr{L}(\mathrm{E}).}$$

2. Si $g \in \mathscr{C}(f)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$, les endomorphismes g et $f - \lambda\,\mathrm{id}$ commutent d'où la stabilité de $\mathrm{E}_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}\,)$ par g. Réciproquement, comme f est diagonalisable, on a

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \mathrm{E}_\lambda(f)$$

Soit $x \in \mathrm{E}$. On a $x = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} x_\lambda$ sa décomposition dans la somme directe ci-avant. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$, on a par stabilité de $\mathrm{E}_\lambda(f)$ par g que $g(x_\lambda) \in \mathrm{E}_\lambda(f)$. Il s'ensuit

$$f \circ g(x) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} f(g(x_\lambda)) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \lambda g(x_\lambda) = g\left(\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \lambda x_\lambda\right) = g \circ f(x)$$

Ainsi $\qquad \boxed{g \in \mathscr{C}(f) \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(f) \qquad \mathrm{E}_\lambda(f) \text{ stable par } g}$

Variante : On note $\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda_1, \dots \lambda_r\}$ et $\mathscr{B}_k$ une base de $\mathrm{E}_{\lambda_k}(f)$ pour $k \in [\![1\,; r]\!]$. La famille $\mathscr{B} = \biguplus_{k=1}^{r} \mathscr{B}_k$ est une base de E adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{E}_{\lambda_k}(f)$. Si les sev propres sont stables, alors $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} g = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_r)$. La matrice $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} g$ commute clairement avec $\operatorname{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \ldots, \lambda_r I_{m_r})$ d'où le résultat.

3. On conserve les notations précédentes. D'après l'équivalence précédente, on obtient

$$g \in \mathscr{C}(f) \iff \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} g = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_r)$$

avec $A_k \in \mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{K})$ et $m_k = \dim E_{\lambda_k}(f)$ pour $k \in [\![1 ; r]\!]$. L'application $g \mapsto \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} g$ étant un isomorphisme, on a $\mathscr{C}(f)$ isomorphe à l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme précédente et par conséquent

$$\dim \mathscr{C}(f) = \sum_{k=1}^{r} \dim \mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{K}) = \sum_{k=1}^{r} m_k^2$$

Autrement dit $\boxed{\dim \mathscr{C}(f) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f)^2}$

Variante : Pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$, l'endomorphisme g induit sur $E_\lambda(f)$ un endomorphisme $g_\lambda \in \mathscr{L}(E_\lambda(f))$. Considérons l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{C}(f) & \longrightarrow \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \mathscr{L}(E_\lambda(f)) \\ g & \longmapsto (g_\lambda)_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \end{cases}$$

Comme une application est caractérisée par ses restrictions sur les sev d'une décomposition de E en somme directe, il s'ensuit que Φ est injective. Étant donné $(g_\lambda)_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \in \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \mathscr{L}(E_\lambda(f))$,

on pose $$g : x = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} x_\lambda \mapsto \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} g_\lambda(x_\lambda)$$

où l'écriture $x = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} x_\lambda$ désigne la décomposition dans $\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} E_\lambda(f)$. L'application g ainsi définie est clairement dans $\mathscr{L}(E)$ et vérifie le critère établi à la question précédente, autrement dit $g \in \mathscr{C}(f)$ ce qui prouve la surjectivité de Φ. Par conséquent, l'application Φ est un isomorphisme et on retrouve

$$\boxed{\dim \mathscr{C}(f) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim \mathscr{L}(E_\lambda(f)) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f)^2}$$

4. Si les valeurs propres simples, on a $\pi_f = \chi_f$ d'où $\dim \mathbb{K}[f] = \dim E$ et $\dim E_\lambda(f) = 1$ pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$ d'où

$$\dim \mathscr{C}(f) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E = \dim \mathbb{K}[f]$$

et comme on a clairement $\mathbb{K}[f] \subset \mathscr{C}(f)$, on conclut

$$\boxed{\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]}$$

Remarques : Pour f diagonalisable, on peut faire mieux en montrant

$$f \text{ à valeurs propres simples} \iff \mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$$

Il suffit d'observer

$$\dim \mathbb{K}[f] = \deg \pi_f \leqslant \dim E = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) \leqslant \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f)^2 = \dim \mathscr{C}(f)$$

et il y a égalité si toutes les inégalités sont des égalités.

Exercice 6 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A} + \mathrm{I}_n$.
Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ puis établir $\det(\mathrm{A}) > 0$.

Corrigé : Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X} - 1$ est annulateur de A. La fonction polynomiale $t \mapsto \mathrm{P}(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par dérivation, pour t réel, on a $\mathrm{P}'(t) = 3t^2 - 1$ puis

$$\mathrm{P}'(t) \geqslant 0 \iff |t| \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$

et
$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} < 0$$

Par suite, en dressant le tableau de variations de $t \mapsto \mathrm{P}(t)$, on obtient que le polynôme P admet une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

t	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		0		$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-1/\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	$f\left(1/\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, le polynôme P est donc scindé à racines simples et par conséquent

$$\boxed{\text{La matrice A est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$$

Soient ω, $\bar{\omega}$ les racines complexes conjuguées de P et α sa racine réelle. Comme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, les racines complexes conjuguées ont même mutliplicité. Par ailleurs, on a $\mathrm{P}(0) = -1$ et on en déduit $\alpha > 0$. Par diagonalisation dans $\mathbb{C}$, il vient

$$\det(\mathrm{A}) = \alpha^{m_\alpha(\mathrm{A})} \left(\omega\bar{\omega}\right)^{m_\omega(\mathrm{A})} = \alpha^{m_\alpha(\mathrm{A})} |\omega|^{2m_\omega(\mathrm{A})}$$

On conclut
$$\boxed{\det(\mathrm{A}) > 0}$$

Exercice 7 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et on pose $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis montrer que si A et B sont diagonalisables, alors φ l'est.

Corrigé : 1. L'application φ est clairement à valeurs dans E et linéaire par linéarité de la somme et bilinéarité du produit matriciel d'où

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. Il existe P, Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{Q}\Delta\mathrm{Q}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\mu_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$. On note $\mathrm{M}_{i,j} = \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1}$ pour tout $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Pour $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, on a

$$\varphi(\mathrm{M}_{i,j}) = \mathrm{AM}_{i,j} + \mathrm{M}_{i,j}\mathrm{B} = \mathrm{PDE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1} + \mathrm{PE}_{i,j}\Delta\mathrm{Q}^{-1}$$

et
$$\mathrm{DE}_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \underbrace{\mathrm{E}_{\ell,\ell}\mathrm{E}_{i,j}}_{\delta_{\ell,i}\mathrm{E}_{\ell,j}} = \lambda_i \mathrm{E}_{i,j} \qquad \mathrm{E}_{i,j}\Delta = \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell \underbrace{\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{\ell,\ell}}_{\delta_{j,\ell}\mathrm{E}_{i,\ell}} = \mu_j \mathrm{E}_{i,j}$$

Ainsi $$\varphi(\mathrm{M}_{i,j}) = \lambda_i \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1} + \mu_j \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1} = (\lambda_i + \mu_j)\mathrm{M}_{i,j}$$
La famille $(\mathrm{M}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$ est donc une famille de vecteurs propres de φ et on vérifie sans difficulté qu'elle est libre ce qui prouve qu'il s'agit d'une base de diagonalisation de φ. Ainsi
$$\boxed{\mathrm{A}, \mathrm{B} \text{ diagonalisables} \Longrightarrow \varphi \text{ diagonalisable}}$$

Exercice 8 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer
$$\mathrm{A} \text{ nilpotente} \iff \forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = 0$$

Corrigé : Le sens direct est immédiat puisque A est trigonalisable et $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) = \{0\}$. Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \neq \{0\}$ et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de A. Par trigonalisation, on a
$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i}\lambda_i^k = 0$$
En particulier $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \ldots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{V}} \begin{pmatrix} m_{\lambda_1}\lambda_1 \\ \vdots \\ m_{\lambda_p}\lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
On a $$\det \mathrm{V} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant p} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$
ce qui impose $m_{\lambda_i}\lambda_i = 0$ et qui est absurde puisque les λ_i sont valeurs propres donc de multiplicité non nulle et sont supposées non nulles. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \{0\}$ et comme A est trigonalisable, l'inclusion est une égalité et on obtient la nilpotence de A. Ainsi
$$\boxed{\mathrm{A} \text{ nilpotente} \iff \forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = 0}$$
Variante : Supposons $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = 0$ pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. On en déduit $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{P}(\mathrm{A})) = 0$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ vérifiant $\mathrm{P}(0) = 0$. Supposons $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \neq \{0\}$. On considère la famille de polynômes interpolateur $(\mathrm{L}_\lambda)_\lambda$ associés à $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cup \{0\}$. Le cardinal de cet ensemble est au plus $n+1$. Les polynômes L_λ sont donc de degré au plus n. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \setminus \{0\}$. On a $\mathrm{L}_\lambda(0) = 0$ d'où $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\lambda(\mathrm{A})) = 0$. Or, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$ d'où
$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\lambda(\mathrm{A})) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\lambda(\mathrm{T})) = m_\lambda = 0 \quad \text{avec} \quad m_\lambda \geqslant 1$$
ce qui est absurde. On en déduit $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \{0\}$ d'où l'égalité puisque le spectre complexe est non vide.

Exercice 9 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Corrigé : Par une récurrence immédiate, on montre que
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{B}^k = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^k & 0 \\ \hline k\mathrm{A}^k & \mathrm{A}^k \end{array}\right)$$

Il s'ensuit par combinaison linéaire

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & 0 \\ \hline \mathrm{AP}'(\mathrm{A}) & \mathrm{P}(\mathrm{A}) \end{array}\right)$$

Si B est diagonalisable, on peut choisir P scindé à racines simples qui annule B. Par conséquent, on a également $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{AP}'(\mathrm{A}) = 0$. Le polynôme P étant scindé à racines simples, les racines de P' sont distinctes de celles de P d'où $\mathrm{P} \wedge \mathrm{XP}' = 1$ ou X. Or, on a $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{P}$ et $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{XP}'$ d'où $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{P} \wedge \mathrm{XP}'$ et $\deg \pi_{\mathrm{A}} \geqslant 1$ ce qui prouve $\pi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$ et donc $\mathrm{A} = 0$. La réciproque est évidente. On conclut

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) \text{ diagonalisable } \iff \mathrm{A} = 0}$$

Exercice 10 (***)

Pour $n \geqslant 2$, montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Corrigé : Soit H hyperplan de $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons $\mathrm{H} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \varnothing$. Comme $\mathrm{I}_n \notin \mathrm{H}$, alors $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{H} = \mathrm{E}$. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ nilpotente. Il existe $(\mathrm{A}, \lambda) \in \mathrm{H} \times \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n$. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}$ avec $\mathrm{X} \neq 0$, choix possible puisque A n'est pas inversible. On trouve $\mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X}$. Or, le spectre d'une matrice nilpotente est réduit à $\{0\}$ d'où $\lambda = 0$ et par conséquent $\mathrm{M} = \mathrm{A} \in \mathrm{H}$. Ainsi, l'hyperplan contient toutes les matrices nilpotentes. Par stabilité par combinaison linéaire, il contient donc $\mathrm{E}_{n,1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mathrm{E}_{i,i+1}$, somme de deux matrices triangulaires strictes. Mais cette matrice est inversible ce qui contredit l'hypothèse faite sur H. Par conséquent

$$\boxed{\text{Tout hyperplan de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ rencontre } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).}$$

Exercice 11 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{A} & 0 \end{array}\right)$.

1. Relier les sous-espaces propres de A et B.
2. Préciser les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction de ceux de A.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix}$. On a

$$\mathrm{BX} = \lambda \mathrm{X} \iff \begin{pmatrix} \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{AX1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \mathrm{AX}_1 = \lambda^2 \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 = \lambda \mathrm{X}_1 \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \iff \lambda^2 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad \mathrm{X} \in \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B}) \iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \lambda \mathrm{X}_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{X}_1 \in \mathrm{E}_{\lambda^2}(\mathrm{A})}$$

Remarque : On a $\chi_{\mathrm{B}} = \begin{vmatrix} \mathrm{XI}_n & -\mathrm{I}_n \\ -\mathrm{U} & \mathrm{XI}_n \end{vmatrix}$. Les opérations $\mathrm{L}_k \leftarrow \mathrm{L}_k + \dfrac{1}{\mathrm{X}} \mathrm{L}_{k+n}$ pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ donnent

$$\chi_{\mathrm{B}} = \begin{vmatrix} \mathrm{XI}_n - \dfrac{1}{\mathrm{X}} \mathrm{U} & 0 \\ -\mathrm{U} & \mathrm{XI}_n \end{vmatrix} = \det(\mathrm{X}^2 \mathrm{I}_n - \mathrm{U}) = \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}^2)$$

On retrouve le lien précédemment établi sur le spectre.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$. L'application $\mathrm{X}_1 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 & \lambda \mathrm{X}_1 \end{pmatrix}$ est injective. Une base de vecteurs propres de $\mathrm{E}_{\lambda^2}(\mathrm{A})$ sera donc envoyée sur une famille libre de vecteurs propres de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B})$. On conclut

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \qquad \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B}) = \dim \mathrm{E}_{\lambda^2}(\mathrm{A})}$$

3. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $\pm\,\mathrm{R}(\alpha)$ les solutions complexes de l'équation $z^2 = \alpha$. D'après le résultat de la première question, on a

$$\mu \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \iff \mu^2 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \iff \mu \in \{\pm\,\mathrm{R}(\lambda), \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})\}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, les racines complexes $\pm\,\mathrm{R}(\alpha)$ sont distinctes. Ainsi

$$\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \smallsetminus \{0\}} \dim \mathrm{E}_\mu(\mathrm{B}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\}} \dim \mathrm{E}_{\mathrm{R}(\lambda)}(\mathrm{B}) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\}} \dim \mathrm{E}_{-\mathrm{R}(\lambda)}(\mathrm{B})$$

D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\} \qquad \dim \mathrm{E}_{\pm\,\mathrm{R}(\lambda)}(\mathrm{B}) = \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

Ainsi
$$\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \smallsetminus \{0\}} \dim \mathrm{E}_\mu(\mathrm{B}) = 2 \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

Enfin, en considérant $\lambda = 0$ dans l'équation $\mathrm{BX} = \lambda \mathrm{X}$ écrite à la première question, on observe $\dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{B}$. Ainsi

$$\dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} + \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \smallsetminus \{0\}} \dim \mathrm{E}_\mu(\mathrm{B}) = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} + 2 \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

On pose
$$\alpha = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \beta = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

Les sev concernés étant en somme directe, on a $\alpha + \beta \leqslant n$ et en particulier $\beta \leqslant n$ puis

$$\mathrm{B} \text{ diagonalisable} \iff \alpha + 2\beta = 2n \iff \underbrace{\alpha + \beta}_{\leqslant n} + \underbrace{\beta}_{\leqslant n} = 2n \iff \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = n$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{B} \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathrm{A} \text{ diagonalisable}}$$

Exercice 12 (****)

On pose
$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_n = \chi_{\mathrm{A}_n}$$

1. En considérant $\mathrm{P}_n(2\cos(\theta))$ avec $\theta \in \,]\,0\,;\pi\,[$, déterminer une expression factorisée de P_n.
2. En déduire que A_n est diagonalisable et préciser ses éléments propres

Corrigé : 1. Soit $\theta \in \,]\,0\,;\pi\,[$. En développant sur la première ligne, on trouve pour $n \geqslant 3$

$$\mathrm{P}_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\mathrm{P}_{n-1}(2\cos(\theta)) - \mathrm{P}_{n-2}(2\cos(\theta))$$

Ainsi, la suite $(\mathrm{P}_n(2\cos\theta))_{n \geqslant 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2\cos(\theta) r + 1 = 0$$

Les racines $\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\theta}$ sont complexes conjuguées d'où l'existence de réels λ, μ tels que

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{P}_n(2\cos(\theta)) = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$$

On a $\mathrm{P}_0(2\cos(\theta)) = 1$ et $\mathrm{P}_1(2\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)$. Puis, on trouve

$$\begin{cases} \mathrm{P}_0(2\cos(\theta)) = \lambda = 1 \\ \mathrm{P}_1(2\cos(\theta)) = \lambda\cos(\theta) + \mu\sin(\theta) = 2\cos(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin(\theta)\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Soit n entier non nul. On a

$$\mathrm{P}_n(2\cos(\theta)) = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0 \iff \theta \in \left\{\frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ étant injective sur $]\,0\,;\pi\,[$, on a

$$\mathrm{Card}\,\left\{\frac{k\pi}{n+1}, k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]\right\} = \mathrm{Card}\,\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]\right\}$$

Comme P_n est unitaire de degré n et qu'on vient d'exhiber n racines distinctes, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\mathrm{X} - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)}$$

Remarque : La suite $(\mathrm{P}_n(2\cos(\theta)))_n$ est la suite des polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

2. Soit n entier non nul. La matrice A_n admet n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable par condition suffisante. Notons

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$$

On a

$$(\mathrm{A}_n - 2\cos(\theta_k)\mathrm{I}_n)\mathrm{X} = 0 \iff \forall \ell \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad x_{\ell-1} - 2\cos(\theta_k)x_\ell + x_{\ell+1} = 0 \quad \text{avec} \quad x_0 = x_{n+1} = 0$$

La suite $(x_\ell)_{\ell\in[\![\,0\,;\,n+1\,]\!]}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 et comme à la première question, on obtient l'existence de α, β réels tels que

$$\forall \ell \in [\![\,0\,;\,n+1\,]\!] \qquad x_\ell = \alpha\cos(\ell\theta_k) + \beta\sin(\ell\theta_k)$$

La condition $x_0 = 0$ fournit $\alpha = 0$ et on obtient

$$\forall \ell \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad x_\ell = \beta\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La matrice } \mathrm{A}_n \text{ est diagonalisable avec } \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n) = \left\{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right), k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]\right\} \\ \text{et } \mathrm{E}_{2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{Vect}\,\left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right), \ldots, \sin\left(\dfrac{nk\pi}{n+1}\right)\right) \text{ pour } k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]. \end{array}}$$

Remarque : On peut invoquer le théorème spectral pour la diagonalisabilité de la matrice symétrique réelle A_n.