ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral - Feuille n°1

Exercice 1 (CCINP 2024)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$$

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle $]-r\,;r[$ avec $r > 0$. On donnera le développement et on précisera l'intervalle de convergence.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $\mathrm{R} > 0$ et g sa somme définie sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$. Exprimer, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$ et $\mathrm{E} = \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. On pose $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - \mathrm{P}'$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières : sans utiliser de matrice de f, en utilisant une matrice de f.
2. Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$. Trouver P tel que $f(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$.
   Indication : Si $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, quel est le polynôme $\mathrm{P}^{(n+1)}$?
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 3 (CCINP 2024)

Soit N entier non nul, $p \in \,]0\,;1[$, $q = 1 - p$. On considère $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Pour $i \in [\![1\,;\, \mathrm{N}]\!]$ et n entier non nul, déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i > n)$.
2. On pose $\mathrm{Y} = \min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N})$.
   (a) Pour n entier non nul, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Y} > n)$. En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y et préciser $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2024)

Quel est le nombre d'applications $f : [\![1\,;\, n]\!] \to [\![1\,;\, n]\!]$ telles que $f \circ f = f$?

Exercice 5 (Mines-Telecom 2024)

On pose $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

1. Déterminer I le domaine de définition de f.
2. Montrer $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.
3. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 6 (Mines 2024)

Soit φ la fonction indicatrice d'Euler. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(n) \geqslant \frac{n\ln(2)}{\ln(n)+\ln(2)}$$

Exercice 7 (Mines 2024)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > -1$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour n entier.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ admet une limite.
2. On suppose $u_0 > 0$ et on pose $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$ pour n entier.
   (a) Montrer la convergence de $(v_n)_n$ vers un réel α puis établir
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \alpha - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}$$
   (b) Déterminer un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$.
3. Déterminer un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$ dans le cas $u_0 \in \,]-1\,;0\,[$.

Exercice 8 (Centrale 2024)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) = \varnothing$.

1. Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton et le prouver dans le cas diagonalisable.
2. (a) Montrer que les matrices $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ sont inversibles.
   (b) Montrer que pour toute matrice $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{AD} - \mathrm{DB} = \mathrm{C}$.
3. Soit $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que les matrices $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ sont semblables.
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les matrices A et B pour que la matrice $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{B} \end{array}\right)$ soit diagonalisable.

Exercice 9 (Centrale 2024)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On définit la fonction de répartition d'une variable aléatoire X notée $\mathrm{F_X}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F_X}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant x)$$

1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Montrer
   $$\text{la fonction } \mathrm{F_X} \text{ croît et } \mathrm{F_X}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$
   Soit E une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ et soient X et $(\mathrm{X}_n)_n$ des variables aléatoires à valeurs dans E. On suppose
   $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$$
2. Montrer
   $$\sum_{x\in\mathrm{E}} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
3. Montrer que la suite $(\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n})_n$ converge uniformément vers $\mathrm{F_X}$.