ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral - Feuille n°2

Exercice 1 (CCINP 2024)

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs et $\ell \in \,]\,0\,;1\,[$.

1. Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Nature de la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$?

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $f^2 - f - 2\,\mathrm{id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Établir $$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}\,) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}\,)$$ en utilisant le lemme des noyaux puis sans l'utiliser.
3. On suppose désormais E de dimension finie. Montrer $$\mathrm{Im}\,(f + \mathrm{id}\,) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}\,)$$

Exercice 3 (CCINP 2024)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $\mathrm{R_X}$ le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)t^n$ et $\mathrm{D_{G_X}}$ le domaine de définition de $\mathrm{G_X} : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)t^n$.

1. (a) Prouver que $\mathrm{R_X} \geqslant 1$ puis justifier que $[-1\,;1] \subset \mathrm{D_{G_X}}$. Pour $t \in [-1\,;1]$, exprimer $\mathrm{G_X}(t)$ sous forme d'une espérance.
   (b) Soit k entier. Exprimer $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$ en fonction de $\mathrm{G_X^{(k)}}(0)$.
2. (a) On suppose que $\mathrm{X} \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer $\mathrm{D_{G_X}}$ puis $\mathrm{G_X}(t)$ pour tout $t \in \mathrm{D_{G_X}}$.
   (b) Soient X et Y indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2024)

Soit $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Établir $$\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{U}\mathrm{U}^\top) = 1 + \mathrm{U}^\top\mathrm{U}$$

Exercice 5 (Mines 2024)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe abélien et x, y des éléments de G d'ordres respectifs a et b entiers premiers entre eux. Montrer que $o(xy) = ab$.

Exercice 6 (Mines 2024)

Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ non nul. On note

$$r^+(\mathrm{P}) = \mathrm{Card}\ \mathrm{P}^{-1}(\{0\}) \cap \,]\,0\,;+\infty\,[\quad \text{et} \quad \mathrm{N}(\mathrm{P}) = \mathrm{Card}\ \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$$

1. Que dire de P si $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 1$? $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 2$?
2. On suppose P non constant. Montrer
$$r^+(\mathrm{P}) \leqslant r^+(\mathrm{P}') + 1$$
3. On suppose $\mathrm{P}(0) = 0$. Montrer $\quad r^+(\mathrm{P}) \leqslant r^+(\mathrm{P}')$
4. Montrer $$r^+(\mathrm{P}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{P}) - 1$$
5. Soit n entier, des réels $0 < x_1 < \ldots < x_n$ et des entiers $0 \leqslant p_1 < \ldots < p_n$. Montrer
$$\det \left(x_i^{p_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} > 0$$

Exercice 7 (Centrale 2024)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le *rayon spectral* d'une matrice noté ρ par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \rho(\mathrm{A}) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}{\mathrm{Max}} |\lambda|$$

1. L'application ρ est-elle une norme sur E ?
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Montrer que pour toute norme d'opérateur sur E, on a
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \rho(\mathrm{A}) \leqslant \|\mathrm{A}^p\|_{\mathrm{op}}^{1/p}$$
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E et $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Établir
$$\|\mathrm{A}^k\|^{1/k} \xrightarrow[k \to \infty]{} \rho(\mathrm{A})$$

Exercice 8 (Centrale 2024)

Pour n entier non nul, on note $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité et on pose $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ et $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$.

1. Soient m, n deux entiers non nuls premiers entre eux. Etablir
$$\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n) \quad \text{et} \quad \Lambda(mn) = \Lambda(m)\Lambda(n)$$
2. Déterminer une expression simple de $\Lambda(n)$ pour n entier non nul.
3. Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, montrer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n^2}$$

Exercice 9 (Polytechnique 2024)

Déterminer espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation tirée selon une loi uniforme dans S_n.

Exercice 10 (Polytechnique 2024)

Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k}$ lorsque $n \to +\infty$.