ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral - Feuille n°3

Exercice 1 (CCINP 2024)

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles positives non nulles à partir d'un certain rang.

   Montrer $\qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n, \sum v_n$ de même nature

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n+\mathrm{i})\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$.

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit E un espace euclidien.

1. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $u \circ u^* = u^* \circ u$;
   (b) $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$;
   (c) $\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice 3 (CCINP 2024)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}((\mathrm{X},\mathrm{Y}) = (j,k)) = \frac{(j+k)}{\mathrm{e}\, 2^{j+k} j! k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables sont-elles indépendantes ?
2. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(2^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}})$ puis la calculer.

Exercice 4 (Navale 2024)

Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec les matrices de rang égal à 1.

Exercice 5 (Mines-Telecom 2024)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par u_0 réel et $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$ pour n entier. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 6 (Mines 2024)

Soient a et b entiers naturels non nuls. Montrer que $a \wedge b = 1$ si et seulement pour tout entier $n \geqslant ab$, il existe u, v entiers naturels tels que $au + bv = n$.

Exercice 7 (Centrale 2024)

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de limite nulle en $\pm\infty$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$\forall (f,x)\in \mathrm{E}\times\mathbb{R}\qquad \mathrm{T}(f)(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x-t|}f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Rappeler le théorème de Heine.
   (b) Soit $f\in\mathrm{E}$. Montrer que f est uniformément continue.
2. Montrer $\mathrm{T}\in\mathscr{L}_c(\mathrm{E})$.
3. Déterminer $\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{op}}$.

Exercice 8 (Centrale 2024)

Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_{\mathrm{A}}=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\mathrm{X}^{n-i}$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Énoncer et démontrer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}$. En déduire

$$\forall x\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})\qquad \frac{\chi'_{\mathrm{A}}(x)}{\chi_{\mathrm{A}}(x)}=\mathrm{Tr}\,\left((x\mathrm{I}_n-\mathrm{A})^{-1}\right)$$

   On pose

$$\forall (j,x)\in[\![0\,;\,n]\!]\times\mathbb{C}\qquad \mathrm{B}_j=\sum_{i=0}^{j}a_i\mathrm{A}^{j-i}\qquad \mathrm{Q}(x)=\sum_{j=1}^{n}x^{n-j}\mathrm{B}_{j-1}$$

2. Montrer $\quad\forall x\in\mathbb{C}\qquad \mathrm{Q}(x)(x\mathrm{I}_n-\mathrm{A})=\chi_{\mathrm{A}}(x)\mathrm{I}_n\qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Q}(x))=\chi'_{\mathrm{A}}(x)$

3. On pose $$\forall k\in[\![0\,;\,n-1]\!]\qquad \mathrm{S}_k=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k$$

   Montrer $$\forall j\in[\![0\,;\,n-1]\!]\qquad \sum_{i=0}^{j}a_i\mathrm{S}_{j-i}=(n-j)a_j$$

Exercice 9 (ENS 2024)

Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0>0$ et $x_{n+1}=x_n+\displaystyle\int_{x_n}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour n entier.

1. Préciser la monotonie puis le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 10 (ENS 2024)

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles discrètes dans L^1 et telles que, pour tout $k\in[\![1\,;\,n]\!]$

$$\forall t>0\qquad \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_k})\leqslant\mathrm{e}^{\sigma^2t^2}$$

avec $\sigma>0$. Montrer $$\mathbb{E}\left(\underset{k\in[\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Max}}\mathrm{X}_k\right)\leqslant 2\sigma\sqrt{\ln(n))}$$