Exercice 1 (Mines-Telecom 2019)

On pose $\forall x > 0 \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 2 (Mines-Telecom 2018)

Nature et éléments caractéristiques de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Mines-Telecom 2017)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2017)

Conditions sur les réels a, b, c, d pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 5 (Centrale 2022)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme définie par $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$ pour $f \in E$. On pose

$$\forall (s, t) \in [0; 1]^2 \quad K(s, t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{si } t \leq s \\ (1-t)s & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\forall (f, s) \in E \times [0; 1] \quad T(f)(s) = \int_0^1 K(s, t) f(t) dt$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. Établir $\forall f \in E \quad \|T(f)\|_2 \leq \frac{1}{3\sqrt{10}} \|f\|_2$
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T .

Exercice 6 (Mines-Telecom 2021)

Pour x réel, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour x réel, déterminer $F'(x)$ en fonction de $G(x)$ et $G'(x)$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 7 (Mines-Telecom 2021)

Soit E euclidien. On note

$$\mathcal{A}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle\}$$

1. Soit $f \in \mathcal{A}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Que peut-on dire de $\text{mat}_{\mathcal{B}} f$?
2. On suppose $\dim E = 2$ et note $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}(E)$. Montrer que $\mathcal{C}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ contenant $\mathcal{A}(E)$.

Exercice 8 (Centrale 2021)

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ vérifie le critère (C) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon \quad (\text{C})$$

1. Soient R et r réels strictement positifs et a, b dans E . Montrer

$$B_f(a, r) \subset B_f(b, R) \iff d(a, b) \leq R - r$$

Qu'en est-il pour les boules ouvertes ?

2. On suppose $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue. Montrer que toute suite vérifiant (C) converge. La réciproque est-elle vraie ?
3. On suppose que toute suite de E vérifiant (C) est convergente. Montrer que l'intersection de toute suite décroissante de boules fermées est une boule fermée.

Exercice 9 (Centrale 2023)

1. Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une relation entre A , $\text{Com } A$ et $\det A$.
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\det A$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres coefficients sont négatifs et tels que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- (a) Montrer que la matrice A est inversible.
- (b) Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

Exercice 10 (Centrale 2023)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X_x une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $x > 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_x)$ puis établir

$$\mathbb{P}(|X_x - \mathbb{E}(X_x)| \geq \varepsilon x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soit α réel et $u_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!} x^n$ pour x réel.

2. (a) Préciser le domaine de définition de u_α .
(b) Déterminer u_1 et u_2 .
3. (a) Soit $\alpha < 0$. Montrer $u_\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$
(b) Soit $\alpha \in]-1; 0[$. Établir $u_\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^\alpha e^x$

Exercice 11 (Centrale 2023)

1. Donner la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme puis sa caractérisation à l'aide des dérivées successives du polynôme.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Exprimer $\frac{P'}{P}$ à l'aide des racines de P .
3. Soit $r > 0$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que le polynôme P ne s'annule pas sur le cercle $\mathcal{C}(0, r)$ du plan complexe. On pose

$$N_r(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})re^{it}}{P(re^{it})} dt$$

Montrer que la quantité $N_r(P)$ est égal au nombre de racines de P comptées avec multiplicité dans la disque $D(0, r)$.

Exercice 12 (Mines 2019)

Pour n entier, on définit le polynôme de *Laguerre* L_n par

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^n]$$

On note $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid t \mapsto f^2(t)e^{-t} \text{ intégrable}\}$

muni du produit scalaire

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$$

et $\Lambda = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid f \text{ admet une limite finie en } +\infty\}$

1. Vérifier que pour tout entier n , L_n est un polynôme de degré n et préciser son coefficient dominant.
2. Vérifier que $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ existe et définit un produit scalaire sur E .
3. Pour n entier, calculer $\langle L_n, X^k \rangle$ avec $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. En déduire que $(L_n)_n$ est une famille orthonormale de E .
4. Montrer $\forall \alpha \geq 0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_\alpha, L_n \rangle^2 = \frac{1}{2\alpha + 1}$ avec $f_\alpha : t \mapsto e^{-\alpha t}$
5. En déduire $f_\alpha \in \overline{\text{Vect}(L_n)_n}$.
6. Montrer que $(f_n)_n$ est une suite totale de E puis en déduire que $(L_n)_n$ est une famille orthonormale totale de E .

Exercice 13 (Mines 2021)

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1; N \rrbracket$. Calculer $\mathbb{E}(\text{Card} \{X_1, \dots, X_n\})$.