Exercice 1 (Mines-Telecom 2019)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$.
3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$

Soit $x > 0$. La séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ vérifie clairement le critère des séries alternées d'où la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Soit $a > 0$. Par contrôle du reste, on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,a\,;+\infty\,[\qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)x} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}$$

d'où $$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la série de fonctions continues $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur tout segment de $]\,0\,;+\infty\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie et continue sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. On pose $\quad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad v_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{1+nx}$

La série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ vérifie le critère des séries alternées d'où, par contrôle du reste

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{x}{1+(n+1)x} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On en déduit la convergence uniforme sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ et comme on a

$$v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{(-1)^n}{n}$$

on obtient, par théorème de la double limite

$$x\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{x}}$$

3. La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}$$

Pour $x > 0$ fixé, on pose $$\forall u > 0 \qquad \varphi(u) = \frac{u}{(1+ux)^2}$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et par dérivation

$$\forall u > 0 \qquad \varphi'(u) = \frac{(1+ux)\,[(1+ux)-2xu]}{(1+ux)^4} = \frac{(1+ux)\,(1-xu)}{(1+ux)^3}$$

On en déduit que φ décroît sur $\left[\dfrac{1}{x}\,;+\infty\right[$ et par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u'_n$ vérifie le critère des séries alternées à partir d'un certain rang. Ainsi par contrôle du reste d'une série alternée, pour $a > 0$, en observant que pour $x \geqslant a$, on a l'implication $n \geqslant 1/a \Longrightarrow n \geqslant 1/x$, on obtient alors

$$\forall n \geqslant \frac{1}{a} \qquad \forall x \geqslant a \qquad |\mathrm{R}'_n(x)| \leqslant \frac{(n+1)}{(1+(n+1)x)^2} \leqslant \frac{(n+1)}{(1+(n+1)a)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

On en déduit la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u'_n$ sur tout segment de $]\,0\,;+\infty\,[$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

Exercice 2 (Mines-Telecom 2018)

Nature et éléments caractéristiques de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Corrigé : On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté muni du produit scalaire canonique. Notant (c_1, c_2, c_3) les colonnes de A, on vérifie

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;\,3]\!]^2 \qquad \langle c_i, c_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ d'où $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Avec les opérations $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2$ puis $\mathrm{C}_2 \leftarrow \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3$, on obtient $\det \mathrm{A} = 1$ d'où $\mathrm{A} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ autrement dit A est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$.

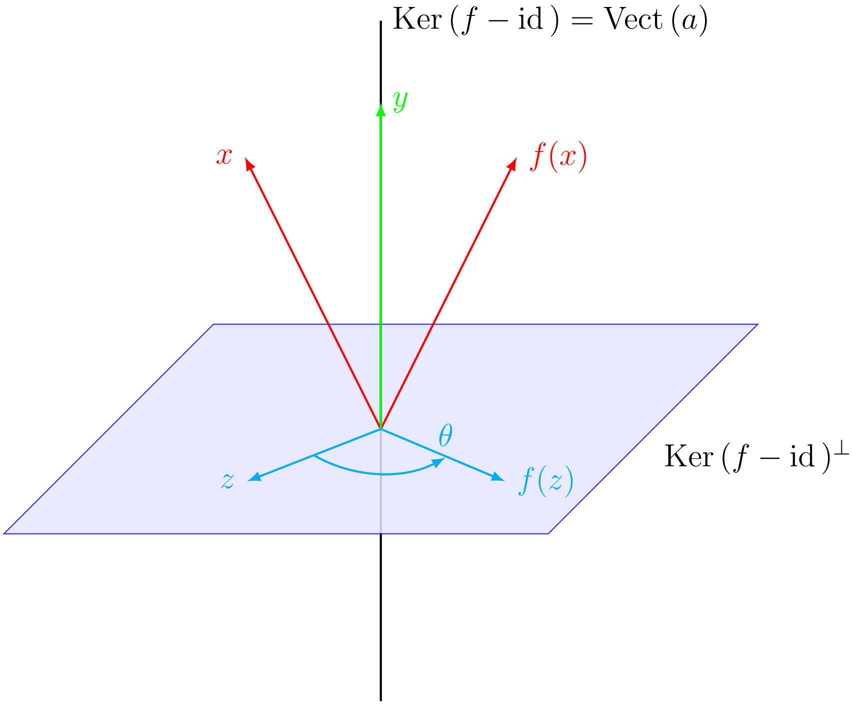

Figure 1 – Rotation $\mathrm{rot}(a, \theta)$

On cherche l'ensemble des invariants de f. On trouve

$$\mathrm{AX} = \mathrm{X} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\,(0, 1, 1)$$

On sait que A est orthogonalement semblable à $\mathrm{diag}(1, \mathrm{R}(\theta))$ avec θ réel d'où

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{A} = 1 + 2\cos\theta$$

On en déduit
$$\theta \in \pm \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Enfin, pour déterminer le signe sur l'angle, on calcule le déterminant d'une famille libre bien choisie. On note $a = (0, 1, 1)$ et on choisit $b = (1, 0, 0)$ non colinéaire à a et $c = f(b) = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$.

On trouve
$$\det_{\mathscr{C}}(a, b, c) < 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est la rotation d'axe dirigé par } (0, 1, 1) \text{ d'angle } -\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right).}$$

Exercice 3 (Mines-Telecom 2017)

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 0$ et $x \to +\infty$.

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$

Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x^2}$ d'où la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ d'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs. Pour $a > 0$, on a

$$\|u_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = \frac{1}{1+n^2a^2}$$

La convergence normale et donc uniforme s'en déduit. Et comme il s'agit d'une série de fonctions continues, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie et continue sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2x^2}$ est décroissante, positive, continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et par comparaison série/intégrale, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}$$

d'où
$$\left[\frac{1}{x}\,\mathrm{Arctan}\,(tx)\right]_1^{+\infty} \leqslant f(x) \leqslant \left[\frac{1}{x}\,\mathrm{Arctan}\,(tx)\right]_0^{+\infty}$$

On en déduit
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2x}}$$

En revanche, l'encadrement ne permet pas de conclure sur un équivalent pour $x \to +\infty$. Comme $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x^2}$ pour tout n entier non nul, on pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad v_n(x) = x^2u_n(x) = \frac{x^2}{1+n^2x^2}$$

On a
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}$$

ce qui prouve la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, d'après le théorème de double limite, il vient

$$x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

On conclut
$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\zeta(2)}{x^2}}$$

Exercice 4 (Mines-Telecom 2017)

Conditions sur les réels a, b, c, d pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Corrigé : La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ est triangulaire donc son spectre se lit sur sa diagonale. Si $d \notin \{1, 2\}$, la matrice A possède 3 valeurs propres distinctes et est d'ordre 3 d'où son caractère diagonalisable. Supposons $d = 1$. On a A diagonalisable si et seulement si $\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = m_1(\mathrm{A}) = 2$. Puis, on trouve

$$\mathrm{A} - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{rg}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} = 1 \iff ac - b = 0$$

Enfin, supposons $d = 2$. On a A diagonalisable si et seulement si $\dim \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = m_2(\mathrm{A}) = 2$. Puis, on trouve

$$\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{rg}(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3) = 1 \iff c = 0$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La matrice A est diagonalisable si et seulement si} \\ d \notin \{1, 2\} \text{ ou } d = 1 \text{ et } ac - b = 0 \text{ ou } d = 2 \text{ et } c = 0. \end{array}}$$

Exercice 5 (Centrale 2022)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ muni de la norme définie par $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t}$ pour $f \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{si } t \leqslant s \\ (1-t)s & \text{sinon} \end{cases}$$

et
$$\forall (f,s) \in \mathrm{E} \times [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)(s) = \int_0^1 \mathrm{K}(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

2. Établir $$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{T}(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{3\sqrt{10}}\|f\|_2$$

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

Corrigé : 1. On remarque

$$\forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) = (1-\max(s,t))\min(s,t)$$

avec
$$\max(s,t) = \frac{s+t+|s-t|}{2} \qquad \min(s,t) = \frac{s+t-|s-t|}{2}$$

On en déduit la continuité de K sur $[\,0\,;1\,]^2$ comme composée de telles fonctions. Soit $f \in \mathrm{E}$. On vérifie :

- Pour $s \in [\,0\,;1\,]$, on a $t \mapsto \mathrm{K}(s,t)f(t) \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ (et même continue en fait).
- Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on a $s \mapsto \mathrm{K}(s,t)f(t) \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$.
- Domination : On a $\qquad \forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad |\mathrm{K}(s,t)f(t)| \leqslant |f(t)|$

dominante intégrable sur $[\,0\,;1\,]$ car continue sur ce segment. On en déduit $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$ et par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale, on conclut

$$\boxed{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. Soit $(f,s) \in \mathrm{E} \times [\,0\,;1\,]$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\mathrm{T}(f)(s)^2 = \left(\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2\,\mathrm{d}t \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Puis
$$\|\mathrm{T}(f)\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

Soit $s \in [\,0\,;1\,]$. Par relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^s (1-s)^2t^2\,\mathrm{d}t + \int_s^1 (1-t)^2s^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\left((1-s)^2s^3 + (1-s)^3s^2\right) = \frac{1}{3}(1-s)^2s^2 = \frac{1}{3}(s^2-2s^3+s^4)\end{aligned}$$

Ainsi
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{90}$$

On conclut
$$\boxed{\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{T}(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{3\sqrt{10}}\|f\|_2}$$

Remarque : L'énoncé d'origine demandait une majoration en $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, vraiment très grossière...

3. Soit $f \in \mathrm{E}$. Par relation de Chasles, il vient

$$\begin{aligned}\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)(s) &= \int_0^s (1-s)tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_s^1 (1-t)sf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (1-s)\int_0^s tf(t)\,\mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental d'analyse, les fonctions $s \mapsto \displaystyle\int_0^s tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $s \mapsto \displaystyle\int_s^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,]$, primitives respectives de $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto -(1-t)f(t)$. On en déduit que $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,]$ et par dérivation, il vient

$$\begin{aligned}\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)'(s) &= -\int_0^s tf(t)\,\mathrm{d}t + (1-s)sf(s) + \int_s^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t - s(1-s)f(s) \\ &= \int_s^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme précédemment, on en déduit $\mathrm{T}(f)' \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et par dérivation

$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)''(s) = -f(s)$$

Soit λ réel et $f \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{T}(f) = \lambda f$. Si $\lambda = 0$, alors $f = 0_{\mathrm{E}}$. On suppose $\lambda \neq 0$. Il découle de l'égalité $f = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)$ que $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et par dérivation

$$f'' = \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)'' = -\frac{1}{\lambda}f$$

On en déduit

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \begin{cases} \alpha\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) & \text{si } \lambda > 0 \\ \alpha\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{t}{\sqrt{-\lambda}}\right) + \beta\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{t}{\sqrt{-\lambda}}\right) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Or, on a la forme

$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)(s) = \int_0^1 (1-\max(s,t))\min(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où
$$f(0) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)(1) = 0$$

On en déduit $\alpha = 0$ quelque soit le signe de λ puis on exclut $\lambda < 0$ sans quoi on aurait $\beta = 0$ et donc f nulle. Ainsi, on a $\lambda > 0$ et $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$ d'où $\lambda = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ avec k entier non nul et $f \in \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \sin(\pi kt))$. Réciproquement, on choisit $f(t) = \sin(\pi kt)$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$ avec k entier non nul. On a

$$f'' = -(\pi k)^2 f$$

puis après intégration

$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad f'(1) - f'(s) = \int_s^1 f''(t)\,\mathrm{d}t = -(\pi k)^2\int_s^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où
$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \int_s^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(\pi k)^2}\left[f'(s) - f'(1)\right]$$

Par intégration par parties (licite, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$), on trouve

$$\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\sin(\pi kt)\,\mathrm{d}t = \left[-t\frac{\cos(\pi kt)}{\pi k}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi k}\int_0^1 \cos(\pi kt)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{\pi k}$$

et
$$\frac{1}{(\pi k)^2}f'(1) = \frac{\cos(\pi k)}{\pi k} = \frac{(-1)^k}{\pi k}$$

Ainsi, on a
$$\int_s^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(\pi k)^2}f'(s)$$

ce qui prouve
$$\left(\mathrm{T}(f) - \frac{1}{(\pi k)^2}f\right)' = 0$$

Enfin, comme $\mathrm{T}(f) - \dfrac{1}{(\pi k)^2}f$ s'annule en 0, la réciproque est établie. On conclut

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de T sont les } \frac{1}{\pi^2k^2} \text{ d'espaces propres associés } \mathrm{Vect}\,(t\mapsto\sin(\pi kt)) \text{ avec les } k \text{ entiers non nuls.}}$$

Remarque : La plus grande valeur propre de T est $\dfrac{1}{\pi^2} \simeq 0.1013\ldots$ et la constante de majoration établie précédemment est $\dfrac{1}{3\sqrt{10}} \simeq 0.1054\ldots$. C'est donc une assez bonne majoration.

Exercice 6 (Mines-Telecom 2021)

Pour x réel, on pose $\quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour x réel, déterminer $\mathrm{F}'(x)$ en fonction de $\mathrm{G}(x)$ et $\mathrm{G}'(x)$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 0 \qquad g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;1\,]$. La fonction G est une primitive de la fonction continue g. Puis, on vérifie :

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et intégrable sur le segment I.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

• Domination : Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,-a\,;a\,] \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2a$$

et $t \mapsto 2a$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment I. La fonction F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-a\,;a\,]$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-x^2}$

et par une étude de fonctions, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de faire une domination globale (luxe inutile...).

2. Par dérivation, on trouve pour x réel

$$\mathrm{F}'(x) + (\mathrm{G}^2)'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = xt$ (pour $x \neq 0$) dans la première intégrale permet d'obtenir

$$\boxed{\mathrm{F}' + (\mathrm{G}^2)' = 0}$$

Remarque : L'égalité vaut trivialement en $x = 0$.

3. La fonction $\mathrm{F} + \mathrm{G}^2$ de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est donc constante. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\mathrm{F} + \mathrm{G}^2)(x) = (\mathrm{F} + \mathrm{G}^2)(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs, on a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

D'où, après intégration $\qquad \forall x \in \mathrm{X} \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

et par encadrement $\qquad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Ainsi $\qquad \mathrm{G}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{o}(1)}$

On conclut $\qquad \boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Exercice 7 (Mines-Telecom 2021)

Soit E euclidien. On note

$$\mathscr{A}(\mathrm{E}) = \{f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle\}$$

1. Soit $f \in \mathscr{A}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Que peut-on dire de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$?
2. On suppose $\dim \mathrm{E} = 2$ et note $\mathscr{C}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{A}(\mathrm{E})$. Montrer que $\mathscr{C}(\mathrm{E})$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ contenant $\mathscr{A}(\mathrm{E})$.

Corrigé : 1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E et $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle e_j, u(e_i)\rangle = -a_{j,i}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$

2. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. L'application $\mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), u \mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ étant un isomorphisme, le problème équivaut à résoudre l'équation matricielle

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

qui équivaut à $\quad a = d, \quad b = -c$

Ainsi

$$f \in \mathscr{C}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f \in \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_2, \mathrm{E}_{2,1} - \mathrm{E}_{1,2}\right)$$

On conclut $\boxed{\mathscr{C}(\mathrm{E}) \text{ est un sev de } \mathscr{L}(\mathrm{E}) \text{ contenant } \mathscr{A}(\mathrm{E}).}$

Exercice 8 (Centrale 2021)

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ vérifier le critère (C) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0 \qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \varepsilon \tag{C}$$

1. Soient R et r réels strictement positifs et a, b dans E. Montrer

$$\mathrm{B}_f(a,r) \subset \mathrm{B}_f(b,\mathrm{R}) \iff \mathrm{d}(a,b) \leqslant \mathrm{R} - r$$

   Qu'en est-il pour les boules ouvertes ?

2. On suppose $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue. Montrer que toute suite vérifiant (C) converge. La réciproque est-elle vraie ?

3. On suppose que toute suite de E vérifiant (C) est convergente. Montrer que l'intersection de toute suite décroissante de boules fermées est une boule fermée.

Corrigé : 1. Supposons $\mathrm{d}(a,b) \leqslant \mathrm{R} - r$. Soit $x \in \mathrm{B}_f(a,r)$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$\|x - b\| \leqslant \|x - a\| + \|a - b\| \leqslant r + \mathrm{R} - r \leqslant \mathrm{R}$$

d'où l'inclusion. Supposons $\mathrm{B}_f(a,r) \subset \mathrm{B}_f(b,\mathrm{R})$. Si $a = b$, l'inégalité attendue est triviale. Supposons $a \neq b$. On pose $x = a - \dfrac{b-a}{\|b-a\|} r$. On a $x \in \mathrm{B}_f(a,r)$. Puis, on trouve

$$b - x = \left(1 + \frac{r}{\|b-a\|}\right)(b - a)$$

et comme $x \in \mathrm{B}_f(b,\mathrm{R})$, il vient

$$\|b - x\| = \left(1 + \frac{r}{\|b-a\|}\right)\|b - a\| = \|b - a\| + r \leqslant \mathrm{R}$$

d'où l'inégalité attendue. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{B}_f(a,r) \subset \mathrm{B}_f(b,\mathrm{R}) \iff \mathrm{d}(a,b) \leqslant \mathrm{R} - r}$$

Supposons $\mathrm{d}(a,b) \leqslant \mathrm{R} - r$. Pour $x \in \mathrm{B}(a,r)$, on a

$$\|x - b\| \leqslant \|x - a\| + \|a - b\| \leqslant \|x - a\| + \mathrm{R} - r < r + \mathrm{R} - r = \mathrm{R}$$

d'où l'inclusion $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{B}(b,\mathrm{R})$. Supposons ensuite cette inclusion. Soit $\eta \in [\,0\,;r\,[$. On pose $x = a - \dfrac{b-a}{\|b-a\|}\eta$. On a $x \in \mathrm{B}(a,r)$ puis

$$b - x = \left(1 + \frac{\eta}{\|b-a\|}\right)(b - a)$$

et comme $x \in \mathrm{B}(b,\mathrm{R})$, il vient $\qquad \|b - x\| = \|b - a\| + \eta < \mathrm{R}$

d'où $\qquad \forall \eta \in [\,0\,;r\,[\qquad \|b - a\| < \mathrm{R} - \eta$

Faisant tendre $\eta \to r$, on conclut

$$\boxed{\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{B}(b,\mathrm{R}) \iff \mathrm{d}(a,b) \leqslant \mathrm{R} - r}$$

2. Soit $(x_n)_n$ suite réelle vérifiant (C). On dispose de n_0 entier tel que

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad |x_{n_0+p} - x_{n_0}| \leqslant 1$$

d'où $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |x_n| \leqslant \operatorname{Max}\left(|x_0|, \ldots, |x_{n_0}|, 1 + |x_0|\right)$

Ainsi, la suite $(x_n)_n$ est bornée et admet donc une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Soit $\varepsilon > 0$ et φ extractrice telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. On dispose de n_0 et n_1 entiers tel que

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad |x_{n+p} - x_n| \leqslant \varepsilon$$

et $$\forall n \geqslant n_1 \qquad \left|x_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour $n \geqslant q = \max(n_0, \varphi(n_1))$, on trouve par inégalité triangulaire

$$|x_n - \ell| \leqslant \left|x_n - x_{\varphi(q)}\right| + \left|x_{\varphi(q)} - \ell\right| \leqslant 2\varepsilon$$

ce qui prouve $$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Réciproquement, si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, pour $\varepsilon > 0$, on dispose de n_0 entier tel que

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad |x_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où $$\forall n \geqslant n_0 \qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad |x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+p} - \ell| + |x_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On conclut

$$\boxed{\text{Une suite réelle est convergente si et seulement si elle vérifie (C).}}$$

Remarque : Une suite vérifiant (C) est appelée *suite de Cauchy.*

3. Soit $(a_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{B}_f(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathrm{B}_f(a_n, r_n)$$

D'après le résultat de la première question, on en déduit notamment

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \mathrm{d}(a_{n+1}, a_n) \leqslant r_n - r_{n+1}$$

ce qui prouve la décroissance de $(r_n)_n$. Comme il s'agit d'une suite à valeurs positives, alors celle-ci converge d'après le théorème de limite monotone et vérifie donc (C). Soit ε. On dispose de n_0 entier tel que

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad r_n - r_{n+p} \leqslant \varepsilon$$

et toujours d'après le résultat de la première question, il vient

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \|a_{n+p} - a_n\| \leqslant r_n - r_{n+p} \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite $(a_n)_n$ vérifie (C) et est donc convergente. On note

$$r = \lim_{n\to+\infty} r \quad \text{et} \quad a = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_f(a_n, r_n)$. On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|x - a_n\| \leqslant r_n$

et faisant tendre $n \to +\infty$, il vient $\|x - a\| \leqslant r$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{B}_f(a, r)$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{B}_f(a, r)$ et soient n, p entiers. D'après l'inclusion $\mathrm{B}_f(a_{n+p}, r_{n+p}) \subset \mathrm{B}_f(a_n, r_n)$, il vient

$$\|a_n - a_{n+p}\| \leqslant r_n - r_{n+p}$$

Faisant tendre $p \to +\infty$, on trouve par continuité de la norme

$$\|a_n - a\| \leqslant r_n - r$$

Puis, par inégalité triangulaire, on obtient

$$\|x - a_n\| \leqslant \|x - a\| + \|a - a_n\| \leqslant r + r_n - r = r_n$$

ce qui prouve $x \in \mathrm{B}_f(a_n, r_n)$ et ceci vaut pour tout n entier. On conclut

$$\boxed{\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_f(a_n, r_n) = \mathrm{B}_f(a, r)}$$

Exercice 9 (Centrale 2023)

1. Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une relation entre A, Com A et det A.
2. Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Calculer det A.
3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres coefficients sont négatifs et tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$.
   (a) Montrer que la matrice A est inversible.
   (b) Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \det(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

et
$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ désigne le déterminant de la matrice extraite de A par suppression de la ligne i et de la colonne j avec $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$. Par ailleurs, on a les formules de Laplace

$$\boxed{\mathrm{A}(\mathrm{Com}\,\mathrm{A})^\top = (\mathrm{Com}\,\mathrm{A})^\top \mathrm{A} = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n}$$

2. On note $\Delta_n = \det \mathrm{A}$. On trouve en développant selon la première ligne pour $n \geqslant 3$

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

La suite $(\Delta_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre 2. On a $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$ et on peut choisir $\Delta_0 = 1$ pour que la relation de récurrence soit compatibles pour $n = 2$. L'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$$

Ainsi, on a $\Delta_n = an + b$ pour tout n entier et avec $\Delta_0 = b = 1$ puis $\Delta_1 = a + b = 2$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \Delta_n = n+1}$$

Variante : On peut aussi commencer par $\mathrm{C}_1 \leftarrow \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{C}_j$ et après développement selon la première colonne, on trouve $\Delta_n = \Delta_{n-1} + 1$ pour $n \geqslant 2$.

3.(a) Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ colonne non nulle telle que $\mathrm{AX} = 0$. On a

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = a_{i,i} x_i + \sum_{j \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{i\}} a_{i,j} x_j = 0$$

d'où
$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad a_{i,i} x_i = \sum_{j \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{i\}} - a_{i,j} x_j$$

On choisit $i_0 \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \operatorname*{Max}\limits_{i \in [\![1\,;\, n]\!]} |x_i|$. Il vient

$$a_{i_0,i_0} = |a_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{j\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} - a_{i_0,j}\frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leqslant \sum_{j\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} - a_{i_0,j}\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant \sum_{j\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} - a_{i_0,j}$$

ce qui contredit $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} > 0$. Par conséquent

$$\boxed{\text{La matrice A est inversible.}}$$

Remarque : Il s'agit d'un cas particulier de matrice à diagonale dominante stricte.

3.(b) On note $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1} = \big(b_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $(i_0, j_0) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ tel que $b_{i_0,j_0} = \underset{1\leqslant i,j\leqslant n}{\mathrm{Min}}\, b_{i,j}$. On suppose $b_{i_0,j_0} < 0$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \delta_{i,j} \geqslant 0$$

En particulier, on obtient

$$a_{i_0,i_0}b_{i_0,j_0} \geqslant \sum_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} \underbrace{(-a_{i_0,k})}_{\geqslant 0}\ \underbrace{b_{k,j_0}}_{\geqslant b_{i_0,j_0}} \geqslant b_{i_0,j_0} \sum_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} (-a_{i_0,k})$$

d'où

$$a_{i_0,i_0} \leqslant \sum_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} (-a_{i_0,k})$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur la matrice A. On conclut

$$\boxed{\text{Les coefficients de } \mathrm{A}^{-1} \text{ sont positifs.}}$$

Exercice 10 (Centrale 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X_x une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $x > 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}_x)$ puis établir

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_x - \mathbb{E}(\mathrm{X}_x)| \geqslant \varepsilon x\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soit α réel et $u_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} x^n$ pour x réel.

2. (a) Préciser le domaine de définition de u_α.
   (b) Déterminer u_1 et u_2.

3. (a) Soit $\alpha < 0$. Montrer $\qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)$

   (b) Soit $\alpha \in \,]-1\,;0\,[$. Établir $\qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \mathrm{e}^x$

Corrigé : 1. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il vient

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{Y}_x - \mathbb{E}(\mathrm{Y}_x)| \geqslant \varepsilon x\right) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon x)^2}\mathbb{V}(\mathrm{Y}_x) = \frac{1}{\varepsilon^2 x}$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(|\mathrm{Y}_x - x| \geqslant \varepsilon x\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)}$

2.(a) Soit α. Pour n entier non nul, on a

$$\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)\alpha\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière définissant u_α est égal à $+\infty$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } u_\alpha \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ tout entier.}}$$

2.(b) La variable X_x est dans L^2. Par transfert, il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$$

d'où $\qquad u_1(x) = \mathrm{e}^x\mathbb{E}(\mathrm{X}_x) \quad \text{et} \quad u_2(x) = \mathrm{e}^x\left(\mathbb{V}(\mathrm{X}_x) + \mathbb{E}(\mathrm{X}_x)^2\right)$

Ainsi $\qquad \boxed{u_1(x) = x\mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad u_2(x) = x(1+x)\mathrm{e}^x}$

3.(a) Soit $\alpha < 0$. Pour n entier, on note $\mathrm{R}_n(x)$ le reste d'ordre n de la série définissant $\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x)$. On a

$$0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!k^{|\alpha|}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)^{|\alpha|}}\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}}_{\leqslant \mathrm{e}^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^{|\alpha|}}$$

On dispose donc d'un contrôle uniforme du reste d'où $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et d'après le théorème de double limite, il vient

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!n^{|\alpha|}} = 0$$

Ainsi $$\boxed{\forall \alpha < 0 \qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)}$$

Remarque : La convergence normale échoue ici.

3.(b) Soit $\alpha \in \,]-1\,;0\,[$. On pose

$$\forall u \geqslant 0 \qquad \varphi(u) = \begin{cases} u^\alpha & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

La définition de $u_\alpha(x)$ garantit la convergence de la série $\sum \varphi(n)\mathbb{P}(\mathrm{X}_x = n)$. Ainsi, par transfert, il vient

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{n}{x}\right)\mathbb{P}(\mathrm{X}_x = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{x^\alpha n!}\mathrm{e}^{-x} = x^{-\alpha}\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x)$$

Puis $$x^{-\alpha}\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x) - 1 = \mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right)$$

Par inégalité triangulaire dans L^1, il vient

$$\left|\mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right)\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right|\right)$$

On localise avec des fonctions indicatrices et on obtient pour $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right|\right) = \mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| < \varepsilon x\}}\right) + \mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| \geqslant \varepsilon x\}}\right)$$

Comme la variable X_x est valeurs dans $\mathbb{N}$, on observe que

$$\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{X}_x = 0 \\ \dfrac{x}{\mathrm{X}_x}^{|\alpha|} \leqslant x^{|\alpha|} & \text{si } \mathrm{X}_x \geqslant 1 \end{cases}$$

Par conséquent $$\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - 1\right| \leqslant 1 + x^{|\alpha|}$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| \geqslant \varepsilon x\}}\right) \leqslant \left(x^{|\alpha|} + 1\right)\mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| \geqslant \varepsilon x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{1-|\alpha|}}\right) = \mathrm{o}(1)$$

Par continuité de φ en 1, pour $\delta > 0$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall u > 0 \qquad |u - 1| < \varepsilon \implies |\varphi(u) - \varphi(1)| < \delta$$

Ainsi $$\mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| < \varepsilon x\}}\right) \leqslant \delta$$

On peut donc rendre la quantité $\left|\mathbb{E}\left(\varphi\left(\dfrac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right)\right|$ arbitrairement petite pour $x \to +\infty$ et on conclut

$$\boxed{u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \mathrm{e}^x}$$

Exercice 11 (Centrale 2023)

1. Donner la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme puis sa caractérisation à l'aide des dérivées successives du polynôme.
2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant. Exprimer $\dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}$ à l'aide des racines de P.
3. Soir $r > 0$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On suppose que le polynôme P ne s'annule pas sur le cercle $\mathscr{C}(0, r)$ du plan complexe. On pose

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que la quantité $\mathrm{N}_r(\mathrm{P})$ est égal au nombre de racines de P comptées avec multiplicité dans la disque $\mathrm{D}(0, r)$.

Corrigé : 1. Voir cours.

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant. Pour $\mathrm{P} = \lambda \prod_{i=1}^{s} (\mathrm{X} - \alpha_i)^{m_i}$, on trouve

$$\boxed{\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i}{\mathrm{X} - \alpha_i}}$$

3. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. On a

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{X} - a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - \frac{a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

On a $\sum \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\left(\frac{a}{r}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right| \mathrm{d}t = \sum \left(\frac{|a|}{r}\right)^n$ qui converge en tant que série géométrique de raison $\left|\dfrac{a}{r}\right| < 1$. D'après le théorème d'intégration terme à terme, il vient

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{X} - a) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t}_{\delta_{n,0}} = 1$$

Supposons $r < |a|$. Il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_r(\mathrm{X} - a) &= -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{a}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La série $\sum \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\right| \mathrm{d}t = \sum \left(\frac{r}{|a|}\right)^{n+1}$ converge en tant que sérié géométrique de raison $\dfrac{r}{|a|} < 1$. D'après le théorème d'intégration terme à terme, il vient

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{X} - a) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t}_{=0} = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } a \in \mathbb{C}, \text{ on a } \mathrm{N}_r(\mathrm{X} - a) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > |a| \\ 0 & \text{si } r < |a| \end{cases}.}$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Si P est constant, on a clairement $\mathrm{N}_r(\mathrm{P}) = 0$ pour tout $r > 0$. Supposons P non constant. On note $\mathrm{P} = \lambda \prod_{k=1}^{s} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k}$ son écriture scindée dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ garantie par le théorème de d'Alembert-Gauss. Pour $r \in \left]0\,; +\infty\right[\smallsetminus \{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_s|\}$, il vient avec les résultats des questions précédentes

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{s} \frac{m_k}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \alpha_k} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{s} m_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \alpha_k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{s} m_k \mathrm{N}_r(\mathrm{X} - \alpha_k)$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \text{ et } r > 0 \text{ tel que P n'a pas de racine de module égal à } r, \text{ la quantité } \mathrm{N}_r(\mathrm{P}) \text{ représente le nombre de racines compté avec multiplicité dans } \mathrm{D}(0, r).}$$

Exercice 12 (Mines 2019)

Pour n entier, on définit le polynôme de *Laguerre* L_n par

$$\mathrm{L}_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\mathrm{e}^{-x}x^n\right]$$

On note $\qquad \mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \mid t \mapsto f^2(t)\mathrm{e}^{-t} \text{ intégrable}\}$

muni du produit scalaire

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et $\qquad \Lambda = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \mid f \text{ admet une limite finie en } +\infty\}$

1. Vérifier que pour tout entier n, L_n est un polynôme de degré n et préciser son coefficient dominant.
2. Vérifier que $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ existe et définit un produit scalaire sur E.
3. Pour n entier, calculer $\langle \mathrm{L}_n, \mathrm{X}^k\rangle$ avec $k \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]$. En déduire que $(\mathrm{L}_n)_n$ est une famille orthonormale de E.
4. Montrer $\qquad \forall \alpha \geqslant 0 \qquad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \langle f_\alpha, \mathrm{L}_n\rangle^2 = \dfrac{1}{2\alpha+1} \quad$ avec $\quad f_\alpha : t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$
5. En déduire $f_\alpha \in \overline{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{L}_n)_n}$.
6. Montrer que $(f_n)_n$ est une suite totale de E puis en déduire que $(\mathrm{L}_n)_n$ est une famille orthonormale totale de E.

Corrigé : 1. Soit n entier. D'après la formule de Leibniz, on a

$$\mathrm{L}_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{-x}\frac{n!}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{L}_n(\mathrm{X}) = \frac{(-1)^n}{n!}\mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{x^k}{k!}}$$

2. Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. L'intégrale définissant $\langle f, g\rangle$ existe en utilisant

$$(|f| - |g|)^2 \geqslant 0 \iff |fg| \leqslant \frac{1}{2}\left(f^2 + g^2\right)$$

L'application $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est symétrique, linéaire en la première variable par linéarité du produit et de l'intégrale, positive par positivité de l'intégrale. Soit $f \in \mathrm{E}$ telle que $\langle f, f, \rangle = 0$. La fonction $t \mapsto f^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue positive d'où, par séparation de l'intégrale

$$\forall t \geqslant 0 \qquad f^2(t)\mathrm{e}^{-t} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \forall t \geqslant 0 \qquad f(t) = 0$$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{L'application } (f,g) \mapsto \langle f, g\rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$

3. On a $t \mapsto t^k \in \mathrm{E}$ puisque $t^k\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}\left(1/t^2\right)$ par croissances comparées. Par combinaison linéaire, il s'ensuit que $t \mapsto \mathrm{P}(t) \in \mathrm{E}$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Soit n entier et $k \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]$. On a

$$\langle \mathrm{L}_n, \mathrm{X}^k\rangle = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\mathrm{e}^{-t}t^n\right]t^k\,\mathrm{d}t$$

Avec le développement limité $\mathrm{e}^{-t}t^n = t^n + \mathrm{o}(t^n)$, il vient d'après le théorème de Taylor-Young et par unicité du développement limité, les dérivées de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^n$ jusqu'à l'ordre $n-1$ s'annulent en zéro. Par ailleurs, on a

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad t \mapsto \mathrm{e}^{t} \frac{\mathrm{d}^{n-j}}{\mathrm{d}t^{n-j}} \left[\mathrm{e}^{-t} t^n\right] (t^k)^{(j)} \text{ polynomiale}$$

Par suite

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \frac{\mathrm{d}^{n-j}}{\mathrm{d}t^{n-j}} \left[\mathrm{e}^{-t} t^n\right] (t^k)^{(j)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^{n-j}}{\mathrm{d}t^{n-j}} \left[\mathrm{e}^{-t} t^n\right] |_{t=0} = 0$$

D'où après j intégrations par parties

$$\langle \mathrm{L}_n, \mathrm{X}^k \rangle = \frac{(-1)^j}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^{n-j}}{\mathrm{d}t^{n-j}} \left[\mathrm{e}^{-t} t^n\right] (t^k)^{(j)} \,\mathrm{d}t$$

Supposons $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. Après $k+1$ intégrations par parties, on obtient

$$\langle \mathrm{L}_n, \mathrm{X}^k \rangle = \frac{(-1)^{k+1}}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^{n-(k+1)}}{\mathrm{d}t^{n-(k+1)}} \left[\mathrm{e}^{-t} t^n\right] (t^k)^{(k+1)} \,\mathrm{d}t = 0$$

Et avec n intégrations par parties, on trouve

$$\langle \mathrm{L}_n, \mathrm{X}^n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \underbrace{(t^n)^{(n)}}_{=n!} \,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t = (-1)^n \Gamma(n+1)$$

où Γ est la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$. Par intégration parties, on vérifie que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$ et $\Gamma(1) = 1$ d'où, par récurrence, il s'ensuit $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout n entier. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier} \qquad \langle \mathrm{L}_n, \mathrm{X}^k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \\ (-1)^n n! & \text{si } k = n \end{cases}}$$

Il en résulte clairement que la famille $(\mathrm{L}_n)_n$ est orthonormale.

Remarque : On aurait très bien éviter l'invocation du théorème de Taylor-Young et se concentrer sur le terme $(t^k)^{(j)}$. Mais l'intérêt de cette approche est qu'elle s'étend spontanément à la situation suivante.

4. Soit $\alpha \geqslant 0$ et n entier. On a clairement $f_\alpha \in \mathrm{E}$

$$\langle f_\alpha, \mathrm{L}_n \rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left[\mathrm{e}^{-t} t^n\right] \,\mathrm{d}t$$

Par des arguments identiques à précédemment, on a

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad (\mathrm{e}^{-\alpha t})^{(j)} \frac{\mathrm{d}^{n-j}}{\mathrm{d}t^{n-j}} \left[\mathrm{e}^{-t} t^n\right] \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^{n-j}}{\mathrm{d}t^{n-j}} \left[\mathrm{e}^{-t} t^n\right] |_{t=0} = 0$$

Après n intégrations par parties, on trouve

$$\langle f_\alpha, \mathrm{L}_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} (-\alpha)^n \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t = \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-(1+\alpha)t} \,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable affine $u = (1+\alpha)t$ donne

$$\langle f_\alpha, \mathrm{L}_n \rangle = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^n \frac{1}{n!(1+\alpha)} \int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^n$$

Comme $\dfrac{\alpha}{1+\alpha} \in [\,0\,;1\,[$, la série géométrique $\sum \dfrac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{2n}$ converge et on a

$$\boxed{\forall \alpha \geqslant 0 \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_\alpha, \mathrm{L}_n\rangle^2 = \frac{1}{(1+\alpha)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{2n} = \frac{1}{(1+\alpha)^2}\frac{1}{1-\dfrac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}} = \frac{1}{2\alpha+1}}$$

5. Soit $\alpha \geqslant 0$. On a
$$\|f_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha+1}$$

Ainsi
$$\|f_\alpha\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_\alpha, \mathrm{L}_n\rangle^2$$

D'après le résultat de l'exercice 1, on en déduit

$$\boxed{\forall \alpha \geqslant 0 \qquad f_\alpha \in \overline{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{L}_n)_n}}$$

6. On a $\Lambda \subset \mathrm{E}$ puisque si $u \in \Lambda$, alors $u = \mathrm{O}(1)$. Soit $f \in \mathrm{E}$ et posons
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi_n = f \times \mathbb{1}_{[\,0\,;n\,]} + f(n)\mathrm{e}^{-f(n)^2(t-n)} \times \mathbb{1}_{[\,n\,;+\infty\,[}$$
Par construction, pour n entier, on a φ_n continue sur $\mathbb{R}_+$ avec $\varphi_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ d'où $(\varphi_n)_n$ à valeurs dans Λ. On a pour n entier par linéarité (car convergence des intégrales concernées)
$$\begin{aligned}
\|\varphi_n - f\|^2 &= \int_n^{+\infty} \left[f(t) - f(n)\mathrm{e}^{-f(n)^2(t-n)}\right]^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_n^{+\infty} f(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - 2f(n)\mathrm{e}^{nf(n)^2}\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-f(n)^2t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + f(n)^2\mathrm{e}^{2nf(n)^2}\int_n^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\left[2f(n)^2+1\right]}\,\mathrm{d}t\\
\|\varphi_n - f\|^2 &= \int_n^{+\infty} f(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - 2f(n)\mathrm{e}^{nf(n)^2}\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-f(n)^2t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \frac{f(n)^2}{1+2f(n)^2}\times\mathrm{e}^{-n}
\end{aligned}$$

On a $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(1)$ et $\displaystyle\frac{f(n)^2}{1+2f(n)^2}\times\mathrm{e}^{-n} = \mathrm{O}(1)\times\mathrm{e}^{-n} = \mathrm{o}(1)$

Enfin, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'espace $\mathscr{C}([\,n\,;+\infty\,],\mathbb{R})$, on obtient
$$\left(\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-f(n)^2t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_n^{+\infty} f^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\int_n^{+\infty}\mathrm{e}^{-2f(n)^2t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

d'où
$$\left|2f(n)\mathrm{e}^{nf(n)^2}\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-f(n)^2t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \underbrace{\frac{2\,|f(n)|}{\sqrt{2f(n)^2+1}}}_{=\mathrm{O}(1)}\underbrace{\mathrm{e}^{-n/2}\sqrt{\int_n^{+\infty} f^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}}_{=\mathrm{o}(1)}$$

Par suite
$$\|\varphi_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui prouve que $\overline{\Lambda} = \mathrm{E}$. Puis considérons $g \in \Lambda$ et posons
$$\forall u \in [\,0\,;1\,] \qquad h(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{si } u \in \,]\,0\,;1\,]\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) & \text{si } u = 0\end{cases}$$

Par construction, on a $h \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. D'après le théorème de Weierstrass, on a
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad | \quad \|h - \mathrm{P}\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} \leqslant \varepsilon$$

Comme $\|h-\mathrm{P}\|_{\infty,]\,0\,;1\,]} \leqslant \|h-\mathrm{P}\|_{\infty,[\,0\,;1\,]}$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et comme $\psi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]\,0\,;1\,]$, il vient
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad | \quad \|g - \mathrm{P}\circ\psi\|_{\infty,[\,0\,;+\infty\,[} \leqslant \varepsilon$$

d'où $$\|g-\mathrm{P}\circ\psi\| = \sqrt{\int_0^{+\infty}\left[g(t)-\mathrm{P}\circ\psi(t)\right]^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty}\varepsilon^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t} = \varepsilon$$

Enfin, on a $$\{\mathrm{P}\circ\psi,\ \mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]\} = \mathrm{Vect}\,(f_n)_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}\,(f_n)_n \subset \Lambda$$

On a montré $$\Lambda \subset \overline{\mathrm{Vect}\,(f_n)_n}$$

d'où $$\mathrm{E} = \overline{\Lambda} \subset \overline{\mathrm{Vect}\,(f_n)_n} \subset \overline{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{L}_n)_n} \subset \mathrm{E}$$

On conclut $$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{L}_n)_n \text{ est une famille orthonormale totale de E.}}$$

Exercice 13 (Mines 2021)

Soit $(\mathrm{X}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]$. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ \{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n\})$.

Corrigé : On a
$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{1}_{k\in\{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n\}}$$

D'où, par linéarité de l'espérance (les variables aléatoires sont finies)
$$\mathbb{E}(\mathrm{R}_n) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}\left(k\in\{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n\}\right)$$

et pour $k\in[\![1\,;\,p]\!]$
$$\mathbb{P}\left(k\notin\{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\mathrm{X}_i\neq k\}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}_i\neq k) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

Ainsi
$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{R}_n) = \sum_{k=1}^{p}\left(1-\mathbb{P}\left(k\notin\{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n\}\right)\right) = p\left(1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^n\right)}$$