Oraux blancs - séance 1

Exercice 1. [Navale MP 2019]
Si (a_n) est une suite à termes positifs telle que $\sum a_n$ converge, a-t-on $a_n = o(1/n)$?
Si, de plus, (a_n) est décroissante, a-t-on $a_n = o(1/n)$?

> ***Solution :***
> *Non :* $\sum v_n$ *où* $v_n = \frac{1}{n}$ *si* n *est une puissance de* 2 *et* 0 *sinon , cette série converge mais n'est pas négligeable devant* $1/n$.
> *Oui : Notons* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. *On montre que* $2nu_{2n} \leqslant 2(S_{2n} - S_n)$ *donc* $2na_{2n} \to 0$. *Par ailleurs* $0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} \leqslant 2nu_{2n+1} + u_{2n+1} \leqslant 2nu_{2n} + u_{2n+1} \to 0$. *Finalement* $nu_n \to 0$.

Exercice 2. [Navale MP 2019]
Soit u un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien. Montrer que

$$u \circ u = \mathrm{Id} \iff u \text{ diagonalisable } \iff \chi_u \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]$$

> ***Solution :***
> *Les deux premières implications sont claires.*
> *On suppose que* χ_u *est scindé dans* $\mathbb{R}[X]$. *Soit* λ *une valeur propre de* u *associée à un vecteur non nul* x, *alors* $(x|x) = (u(x)|u(x)) = \lambda^2(x|x)$ *donc* $\lambda = \pm 1$.
> *Par ailleurs,* $x^\perp$ *est stable par* u, *donc en complétant* x *en une base de* E, *la matrice de* u *dans cette base est diagonale par bloc (avec* ± 1 *au début de la diagonale), et l'on peut raisonner par récurrence pour obtenir une diagonale de* ± 1, *donc* $u \circ u = \mathrm{Id}$.

Exercice 3. [Centrale MP 2021]
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = \ln(2)u$.

1. Montrer que u est nilpotent. *Ind. On pourra calculer* $u^k \circ v - v \circ u^k$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux triangulaires supérieures.

> ***Solution :***
> *(* solution peu détaillée *)*
>
> 1. *Par récurrence :* $\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k \circ v - v \circ u^k = k\ln(2)u$.
>   *Puis :* $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Tr}(u^k) = 0$. *Puis (exo classique mais pas trivial, via système de Vandermonde par exemple)* u *est nilpotent.*
> 2. *On montre que* $\mathrm{Ker}(u)$ *est stable par* v, *on trigonalise par bloc dans une base adaptée à* $\mathrm{Ker}(u)$, *le bloc supérieur gauche pour* v *pouvant être triangulaire car on est sur* $\mathbb{C}$, *le bloc inférieur droit se règle par récurrence avec la relation de l'énoncé pour les blocs matriciels, le cas de base étant trivial.*

Exercice 4. [IMT MP 2018]
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Soit $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$. Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}XP$ soient diagonales.
3. Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution :

1. *$A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.*
2. *Si $X^2 + X = A$ alors $AX = X^3 + X^2 = XA$ donc A et X commutent.*
   Les sous-espace propre $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est stable par X et le sous espace propre $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est aussi stable par X, donc il existe Δ une matrice diagonale telle que $P^{-1}XP = \Delta$.
3. *X est solution de $X^2 + X = A$ si et seulement si Δ est solution de $\Delta^2 + \Delta = D$.*
   On résout ce système pour obtenir $\Delta \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
   Il ne reste plus qu'à calculer les 4 matrices X correspondantes.

Exercice 5. [IMT MP 2016] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.
2. Trouver la limite puis un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Trouver la limite de f en 0.

Solution :

(corrigé peu détaillé *)*

1. *Si $x > 0$, $\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \sim 2e^{-nx}$ si bien que par critère d'équivalence de séries à termes positifs ou nuls, sachant que $|e^{-x}| < 1$ donc la série de terme général e^{-nx} converge, $f(x)$ est bien définie en tant que somme de série convergente.*
   Par imparité de sh f est aussi définie sur $\mathbb{R}_-^*$.
   Enfin si $x = 0$ le termes de la série ne sont pas définis.
   f est finalement définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Par croissance de sh sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $a > 0$, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}(na)}$ qui d'après ce qui précède est le terme général d'une série convergente. Ainsi il y a convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a > 0$, donc continuité (les termes sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$) de f sur $[a, +\infty[$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$, et aussi sur $\mathbb{R}_-^*$ par imparité.
2. *Par convergence normale sur $[1, +\infty[$ on peut intervertir somme et limite, ce qui donne $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.*
   On écrit ensuite $f(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ et on démontre comme dans l'enchaînement des questions précédentes que $\mathrm{sh}(x) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{sh}(nx)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
   Ainsi $f(x) \sim \frac{1}{\mathrm{sh}\, x}$.
3. *Pour tout $x > 0$ on a $f(x) \geqslant \frac{1}{\mathrm{sh}\, x}$ où $\frac{1}{\mathrm{sh}\, x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$, donc par comparaison $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.*

Exercice 6.

Exercice 7. [IMT MP/MPI 2024]
Soient u et v deux endomorphismes nilpotents et non nuls de $\mathbb{R}^n$ qui commutent. On note $\tilde{v}$ l'endomorphisme induit par v sur $\mathrm{Im}(u)$.

1. Montrer que l'endomorphisme $\tilde{v}$ est bien défini et en déduire que $\mathrm{rg}(v \circ u) < \mathrm{rg}(u)$.
2. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des matrices nilpotentes d'ordre n commutant deux à deux. Montrer que leur produit est nul.

Solution :

1. $\operatorname{Im} u$ *est stable par* v ($\forall\, y \in \operatorname{Im} u$, $\exists\, x \in E$, $y = u(x)$ *puis* $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$), *donc la restriction de* v *à* $\operatorname{Im} u$ *est une application linéaire définie sur* $\operatorname{Im} u$ *et à valeurs dans* $\operatorname{Im} u$*, on peut donc bien définir* $\tilde{v}$ *comme endomorphisme de* $\operatorname{Im} u$.
   Ainsi : $\forall\, x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Im} u$ *donc* $v(u(x)) = \tilde{v}(u(x))$ *donc* $v \circ u = \tilde{v} \circ u$.
   Ainsi $\operatorname{Im}(\tilde{v}) \subset \operatorname{Im} u$ *(en exploitant que le fait que* $\tilde{v}$ *a* $\operatorname{Im} u$ *comme espace d'arrivée), et plus précisément,* $\tilde{v}$ *est nilpotent car* v *l'est, donc* $\operatorname{Im}(\tilde{v}) \neq \operatorname{Im}(u)$. *Ainsi*
   $$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(\tilde{v} \circ u) = \dim(\operatorname{Im} \tilde{v} \circ u) < \dim(\operatorname{Im} u) = \operatorname{rg}(u)$$
2. *Par récurrence immédiate en considérant les endomorphismes canoniquement associés aux matrices :* $\operatorname{rg}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \operatorname{rg}(I_n \times A_1 \times \cdots \times A_n) \leqslant \operatorname{rg}(I_n) - n = n - n = 0$ *donc* $A_1 \cdots A_n = 0$.

Exercice 8. [IMT MP/MPI 2024]
Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$. Nature de $\sum u_n$? de $\sum (-1)^n u_n$?

Solution :
Par récurrence immédiate (u_n) *est strictement positive, puis on calcule pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{e^{-u_{n+1}}}{n+2}\frac{n+1}{e^{-u_n}} = \frac{n+1}{n+2}e^{u_n - u_{n+1}} \leqslant e^{u_n - u_{n+1}}$$
ce qui permet, par récurrence, de démontrer la décroissance de (u_n).
En tant que suite décroissante minorée elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
On a alors
$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} \sim \frac{e^{-\ell}}{n} \to 0$$
donc $\ell = 0$ *puis à nouveau* $u_n \sim \frac{1}{n}$.
On peut alors réponse par critère d'équivalence de séries à termes positifs que $\sum u_n$ *diverge.*
Pour $\sum (-1)^n u_n$ *on se ramène au théorème des séries alternée en trouvant un DL à un ordre suffisant.*
Or :
$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} = \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n-1}+o(\frac{1}{n-1})} = \frac{1}{n}(1 - \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{=\frac{1}{n}+o(1/n)} + o(\underbrace{\frac{1}{n-1}}_{=o(1/n)})) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o(1/n^2)$$
donc
$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O(1/n^2)$$
est le terme général d'une série convergente par somme de termes généraux de séries convergente (la première par théorème des séries alternées, la deuxième par comparaison à une série de Riemann).

Exercice 9. [Centrale MP 2024]
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.
Soient G un sous groupe fini de $GL(E)$, $p = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g$ et $V^G = \{x \in E \mid \forall\, g \in G,\ g(x) = x\}$.

1. Montrer que si $h \in G$, $g \in G \mapsto h \circ g \in G$ est une bijection de G sur lui-même, puis que p est un projecteur.

2. Montrer que $\dim(V^G) = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{tr}(g)$.
3. Montrer que tout sous-espace V stable par tous les éléments de G admet un supplémentaire stable pour tous les éléments de G.

   On pourra partir d'un projecteur q de E sur V et considérer $\dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\circ q\circ g^{-1}$.

Solution :

1. *Si* $\varphi_h : g\in G \mapsto h\circ g \in G$, *alors* $\varphi_h\circ\varphi_{h^{-1}} = \varphi_{h^{-1}}\circ\varphi_h = \mathrm{id}_G$, *donc* φ_h *est une bijection de* G *sur lui-même. On calcule alors :* $p^2 = \dfrac{1}{|G|^2}\sum_{g,h\in G} g\circ h = \sum_{h\in G} \underbrace{\sum_{g\in G} gh}_{=_{g'=gh}\sum_{g'\in G} g'} = \dfrac{1}{|G|}\sum_{h\in G} p = p$

   donc p *est un projecteur.*
2. *On va montrer que* $\mathrm{Im}(p) = V^G$. *Déjà, pour tout* $x\in V^G$, *on calcule :* $p(x) = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(x) = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x = x$, *donc* $V^G\subset \mathrm{Im}(p)$. *Soit* $x\in\mathrm{Im}(p)$, *alors pour tout* $h\in G$, $h(x) = h(p(x)) = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} h\circ g(x) \underset{g'=h\circ g}{=} \dfrac{1}{|G|}\sum_{g'\in G} g'(x) = p(x) = x$, *donc* $x\in V^G$. *Finalement* $\mathrm{Im}(p)\subset V^G$ *puis* $\mathrm{Im}(p) = V^G$. *Enfin :* $\dim(V^G) = \mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p) = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}(g)$.
3. *Soit* G *un sous-espace stable par tous les éléments de* G. *Suivons l'indication et étudions* q *un projecteur sur* V *et* $r = \sum_{g\in G} g\circ q\circ g^{-1}$. *On calcule pour tout* $x\in E$ *:*

$$r^2(x) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h\in G} g\circ \underbrace{q\circ g^{-1}\circ h\circ q\circ h^{-1}(x)}_{=g^{-1}\circ h\circ q\circ h^{-1}(x) \text{ car } g^{-1}\circ h\circ q\circ h^{-1}(x)\in g^{-1}\circ h(V)\subset V} = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h\in G} g\circ g^{-1}\circ h\circ q\circ h^{-1}(x)$$
$$= \frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h\in G} \circ h\circ q\circ h^{-1}(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r(x) = r(x)$$

donc $r^2 = r$, *donc* r *est un projecteur, et le calcul précédent montre que* $\mathrm{Im}(r)\subset V$. *Par ailleurs,*

$$\dim(\mathrm{Im}(r)) = \mathrm{rg}(r) = \mathrm{tr}(r) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\underbrace{\mathrm{tr}(g\circ q\circ g^{-1})}_{=\mathrm{tr}(q)} = \mathrm{tr}(q) = \mathrm{rg}(q) = \dim(V)$$

donc $\mathrm{Im}(r) = V$. *Enfin, pour tout* $h\in G$ *on a :*

$$h\circ r\circ h^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} h\circ g\circ q\circ g^{-1}\circ h^{-1} \underset{g'=hg}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G} g'\circ q\circ g'^{-1} = r$$

donc $h\circ r = r\circ h$. *En particulier* $\ker(r)$, *qui est un supplémentaire de* $V = \mathrm{Im}(r)$, *est stable par tous les éléments de* G.

Exercice 10. [IMT MP/MPI 2024]
Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - 2\mathrm{tr}(M)A$.

1. Montrer que f_A est un endomorphisme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante de bijectivité de f_A.
3. Dans le cas de non bijectivité, montrer que f_A est un projecteur.
4. L'endomorphisme f_A est-il diagonalisable ?

Solution :

1. *Linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel, à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par propriété du produit matriciel.*
2. *On traite à part $A=0$: $f_0=\mathrm{id}$, c'est une bijection. On suppose désormais $A\neq 0$.*
   f_A est bijective si et seulement si f_A est injective (endomorphisme en dimension finie). On résout :
   $$f_A(M)=0 \Longleftrightarrow M=2\mathrm{tr}(M)A$$
   Ainsi si $f_A(M)=0$ alors $M\in\mathrm{Vect}(A)$. Par ailleurs, $f_A(A)=A-2\mathrm{tr}(A)A$ donc $f(A)=0$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A)=1/2$ (car $A\neq 0$). Dans ce dernier cas on a bien $\mathrm{Vect}(A)\subset\mathrm{Ker}(f_A)$, et sinon $\mathrm{Ker}(M)\subsetneq\mathrm{Vect}(A)$.
   Autrement dit : f_A est inversible si et seulement $\mathrm{tr}(A)\neq 1/2$.
3. *On suppose $\mathrm{tr}(A)=1/2$, on calcule pour tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:*
   $$f_A^2(M)=f_A(M)-2\mathrm{tr}(f_A(M))A=M-2\mathrm{tr}(M)A-2\mathrm{tr}(M)A+4\mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)A=M-2\mathrm{tr}(M)A=f_A(M)$$
   donc f_A est un projecteur.
4. *Si f_A n'est pas bijectif, c'est un projecteur, il est diagonalisable.*
   Si f_A est bijectif, dans le cas $A=0$, $f_A=\mathrm{id}$ est diagonalisable.
   Sinon on reprend les calculs de la question précédente pour obtenir pour tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
   $$f_A^2(M)=M-(2-2\mathrm{tr}(A)2\mathrm{tr}(M)A=(2-2\mathrm{tr}(A))f_A(M)+(2\mathrm{tr}(A)-1)M$$
   donc le polynôme $X^2-(2-2\mathrm{tr}(A))M+1-2\mathrm{tr}(A)$ est annulateur de f_A.
   Les racines sont 1 et $1-2\mathrm{tr}(A)$, elles sont distinctes si $\mathrm{tr}(A)\neq 0$ et dans ce cas A est diagonalisable (f_A est annulé par un polynôme scindé à racine simple), et si $\mathrm{tr}(A)=0$, alors 1 est l'unique valeur propre donc en cas de diagonalisabilité f_A aurait pour matrice I_{n^2} dans une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc $f_A=\mathrm{id}$ ce qui est absurde lorsque $A\neq 0$.
   Ainsi f_A est diagonalisable si et seulement si ($\mathrm{tr}(A)\neq 0$ ou $A=0$).

Exercice 11. [IMT MP/MPI 2024]
Montrer que $f : x\mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Solution :
Il y a convergence simple de la série de fonctions par théorème des série alternées (ne pas oublié de vérifier que pour x fixé, $\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)$ décroît).
Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $f_k : x\mapsto(-1)^k\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f_k' : x\mapsto(-1)^k\frac{1}{k+x}$. La série $\sum(-1)^k\dfrac{1}{k+x}$ relève elle aussi du théorème des séries alternées, et d'après les résultats sur la majoration du reste :
$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, x\in\mathbb{R}_+,\ |R_n|\leqslant\frac{1}{n+x}\leqslant\frac{1}{n}$$
donc le reste tend uniformément vers 0, la série des dérivées converge uniformément.
On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.