Préparation à l'oral - Feuille n°1

Exercice 1 (CCINP 2024)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\} \qquad f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$$

1. Pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$, décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle $]-r\,;r[$ avec $r > 0$. On donnera le développement et on précisera l'intervalle de convergence.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $\mathrm{R} > 0$ et g sa somme définie sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$. Exprimer, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Corrigé : Exercice 2 CCPINP 2024

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$ et $\mathrm{E} = \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. On pose $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - \mathrm{P}'$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières : sans utiliser de matrice de f, en utilisant une matrice de f.
2. Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$. Trouver P tel que $f(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$.
   Indication : Si $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, quel est le polynôme $\mathrm{P}^{(n+1)}$?
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Corrigé : Exercice 59 CCINP 2024

Exercice 3 (CCINP 2024)

Soit N entier non nul, $p \in\,]0\,;1[$, $q = 1 - p$. On considère $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Pour $i \in [\![1\,;\mathrm{N}]\!]$ et n entier non nul, déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i > n)$.
2. On pose $\mathrm{Y} = \min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N})$.
   (a) Pour n entier non nul, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Y} > n)$. En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y et préciser $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

Corrigé : Exercice 102 CCINP 2024

Exercice 4 (Mines-Telecom 2024)

Quel est le nombre d'applications $f : [\![1\,;n]\!] \to [\![1\,;n]\!]$ telles que $f \circ f = f$?

Corrigé : Soit f une telle application. On note $\mathrm{Im}\, f = \{y_1, \ldots, y_p\}$ avec $p \in [\![1\,;n]\!]$. Pour $i \in [\![1\,;p]\!]$, on dispose de $x_i \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $f(x_i) = y_i$ et

$$f(y_i) = (f \circ f)(x_i) = f(x_i) = y_i$$

ce qui signifie que les y_i sont points fixes de f. Par ailleurs, on a

$$\forall x \in [\![1 ; n]\!] \setminus \mathrm{Im}\, f \qquad f(x) \in \{y_1, \ldots, y_p\}$$

et il n'y a pas d'autre contrainte puisque pour $x \in [\![1 ; n]\!] \setminus \mathrm{Im}\, f$, on dispose de $i \in [\![1 ; p]\!]$ tel que $f(x) = y_i$ puis

$$(f \circ f)(x) = f(y_i) = y_i = f(x)$$

ce qui correspond à choisir une application de $[\![1 ; n]\!] \setminus \mathrm{Im}\, f$ dans $\mathrm{Im}\, f$. Ainsi, le nombre d'applications vérifiant la condition imposée consiste à choisir p points fixes dans $[\![1 ; n]\!]$ avec $p \in [\![1 ; n]\!]$ (l'ensemble d'arrivée n'est pas vide) qui vont constituer $\mathrm{Im}\, f$ ce qui fait $\binom{n}{p}$ choix puis une application de $[\![1 ; n]\!] \setminus \mathrm{Im}\, f$ dans $\mathrm{Im}\, f$ ce qui fait p^{n-p} et ceci pour p variant de $[\![1 ; n]\!]$ par union disjointe selon le cardinal de $\mathrm{Im}\, f$. Formellement, on obtient

$$\left\{ f \in [\![1 ; n]\!]^{[\![1 ; n]\!]} \mid f \circ f = f \right\} =$$

$$\bigsqcup_{p=1}^{n} \bigsqcup_{\mathrm{I} \subset [\![1 ; n]\!] \ \mid\ \mathrm{Card}\ \mathrm{I} = p} \left\{ f \in [\![1 ; n]\!]^{[\![1 ; n]\!]} \mid \forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \notin \mathrm{I} \quad f(x) \in \mathrm{I} \right\}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{Card}\, \left\{ f \in [\![1 ; n]\!]^{[\![1 ; n]\!]} \mid f \circ f = f \right\} = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} p^{n-p}}$$

Exercice 5 (Mines-Telecom 2024)

On pose $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

1. Déterminer I le domaine de définition de f.
2. Montrer $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.
3. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

Corrigé : 1. On pose $$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Pour $x > 0$, on a $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées d'où la convergence simple de $\sum f_n$ sur $]\, 0 ; +\infty\, [$. Pour $x \leqslant 0$, on a $f_n(x) \geqslant 1$ d'où la divergence grossière de $\sum f_n$ sur $]\, -\infty ; 0\,]$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathrm{I} = \,]\, 0 ; +\infty\, [.}$$

2. Pour n entier, on a $f_n \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve pour n et k entiers

$$\forall x > 0 \qquad f_n^{(k)}(x) = (-\sqrt{n})^k \, \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Ainsi, pour $a > 0$, on obtient

$$\| f_n^{(k)} \|_{\infty, [\, a ; +\infty\, [} = n^{\frac{k}{2}} \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

par croissances comparées. On en déduit la convergence normale donc uniforme de $\sum u_n^{(k)}$ sur $[\, a ; +\infty\, [$ pour tout $a > 0$ pour tout k entier. On en déduit

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})}$$

3. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ est continue, décroissante, positive sur $[0\,;+\infty[$. Par comparaison série/intégrale, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 1 \qquad \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

D'où, après une sommation adéquat, intégrale et somme étant de même nature

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

et on trouve $$\forall x > 0 \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}}$$

Exercice 6 (Mines 2024)

Soit φ la fonction indicatrice d'Euler. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(n) \geqslant \frac{n\ln(2)}{\ln(n)+\ln(2)}$$

Corrigé : Soit $n \geqslant 2$ entier. On note $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers avec r entier non nul, les p_i nombres premiers strictement ordonnés et les α_i entiers non nuls. On a

$$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

Par récurrence (finie), on obtient $p_i \geqslant i+1$ pour tout $i \in [\![1\,;\, r]\!]$. C'est vraie pour $i = 1$ et l'hérédité est immédiate. On en déduit

$$\varphi(n) \geqslant n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{i+1}\right) = n\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{i}{i+1}\right) = \frac{n}{r+1}$$

Par ailleurs, on a $$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \geqslant \prod_{i=1}^{r} p_i \geqslant \prod_{i=1}^{r} 2 = 2^r$$

d'où $$r\ln(2) \leqslant \ln(n)$$

Enfin, comme l'inégalité est trivialement vraie pour $n = 1$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(n) \geqslant \frac{n\ln(2)}{\ln(n)+\ln(2)}}$$

Exercice 7 (Mines 2024)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > -1$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour n entier.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ admet une limite.
2. On suppose $u_0 > 0$ et on pose $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$ pour n entier.
   (a) Montrer la convergence de $(v_n)_n$ vers un réel α puis établir

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \alpha - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}$$

(b) Déterminer un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$.

3. Déterminer un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$ dans le cas $u_0 \in \left]-1\,;0\right[$.

Corrigé : 1. La suite $(u_n)_n$ est clairement croissante et par limite monotone, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ admet une limite.}}$$

2.(a) Par croissance, on a $u_n \geqslant u_0 > 0$ pour tout n entier et la suite $(v_n)_n$ est donc bien définie.

On a $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} - v_n = \frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(u_n)}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Ainsi, par convexité de ln et croissance de $(u_n)_n$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}u_n} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}u_0}$$

Par comparaison, la série téléscopique $\sum [v_{n+1} - v_n]$ et on en déduit

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}}$$

Par sommation, on obtient pour n entier

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} [v_{k+1} - v_k] \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}u_k} \leqslant \frac{1}{u_n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Autrement dit $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \alpha - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}}$$

2.(b) Supposons qu'il existe $\ell \geqslant 0$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Par continuité de $x \mapsto x + x^2$ sur $\left[0\,;+\infty\right[$, il s'ensuit $\ell = \ell + \ell^2$ d'où $\ell = 0$ ce qui est absurde puisque $u_n \geqslant u_0 > 0$ pour tout n entier. On en déduit $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ puis

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} 2^n\alpha + \mathrm{o}(1)$$

et par continuité de l'exponentielle, on conclut

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2^n\alpha}}$$

3. On suppose $u_0 \in \left]-1\,;0\right]$. L'intervalle $[-1\,;0]$ est stable par $x \mapsto x^2 + x$ et par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est croissante majorée donc convergente. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Par continuité de $x \mapsto x + x^2$ sur $[-1\,;0]$, on obtient $\ell = \ell + \ell^2$ d'où $\ell = 0$. On suppose $u_0 \in \left]-1\,;0\right[$ car si $u_0 = 0$, la suite stationne. Par récurrence, on montre $u_n \in \left]-1\,;0\right[$ pour tout n entier. Puis, on a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n}\frac{1}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{u_n}(1 - u_n + \mathrm{o}(u_n))$$

d'où $$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

D'après le théorème de Césaro, il vient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

On conclut $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}}$$

Exercice 8 (Centrale 2024)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) = \varnothing$.

1. Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton et le prouver dans le cas diagonalisable.
2. (a) Montrer que les matrices $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ sont inversibles.
   (b) Montrer que pour toute matrice $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{AD} - \mathrm{DB} = \mathrm{C}$.
3. Soit $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que les matrices $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ sont semblables.
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les matrices A et B pour que la matrice $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ soit diagonalisable.

Corrigé : 1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. Supposons que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de diagonalisation de u associée aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On a $\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_i)$ puis

$$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \chi_u(u)(e_i) = \bigcirc_{k \in [\![1 \,;\, n]\!] \setminus \{i\}} (u - \lambda_k \,\mathrm{id}\,) \circ (u - \lambda_i \,\mathrm{id}\,)(e_i) = 0_{\mathrm{E}}$$

ce qui prouve que $\chi_u(u)$ s'annule sur la base $\mathscr{B}$ et par conséquent $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

2.(a) D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on peut écrire

$$\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{m_\lambda(\mathrm{A})}$$

Puis
$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_n)^{m_\lambda(\mathrm{A})} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\
&\iff \det\left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_n)^{m_\lambda(\mathrm{A})}\right) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} [(-1)^n \chi_{\mathrm{B}}(\lambda)]^{m_\lambda(\mathrm{A})} \neq 0 \\
\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad \lambda \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})
\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

2.(b) On pose $\Phi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX} - \mathrm{XB}$. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,\Phi$. On a $\mathrm{AX} = \mathrm{XB}$ d'où $\mathrm{A}^k\mathrm{X} = \mathrm{XB}^k$ pour k entier par récurrence et par conséquent $\mathrm{P(A)X} = \mathrm{XP(B)}$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. En particulier, pour $\mathrm{P} = \chi_{\mathrm{B}}$, il vient

$$\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})\mathrm{X} = \mathrm{X}\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}) = 0$$

La matrice $\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ étant inversible, on en déduit $\mathrm{X} = 0$ d'où Φ injectif et comme c'est un endomorphisme en dimension finie, on conclut

$$\boxed{\Phi \in \mathrm{GL(E)}}$$

3.(a) On pose $\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & \mathrm{D} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_n \end{array}\right)$. On trouve $\mathrm{P}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & -\mathrm{D} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_n \end{array}\right)$. On en déduit

$$\mathrm{P}^{-1}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & -\mathrm{D} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{AD} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{AD} - \mathrm{DB} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$$

On conclut $\boxed{\text{Les matrices sont semblables.}}$

3.(b) On note $\mathrm{M} = \mathrm{diag}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. On trouve $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = \mathrm{diag}(\mathrm{P}(\mathrm{A}), \mathrm{P}(\mathrm{B}))$. S'il existe P annulateur de M scindé à racines simples, alors on en déduit A et B diagonalisables. On suppose A et B diagonalisables. Les polynômes π_A et π_B scindés à racines simples n'ont pas de racines communes et par conséquent, le polynôme $\mathrm{P} = \pi_\mathrm{A}\pi_\mathrm{B}$ est scindé à racines simples et est annulateur de M. On en déduit que la matrice M est diagonalisable si et seulement si les matrices A et B le sont et d'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right) \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{A}, \mathrm{B} \text{ diagonalisables}}$$

Exercice 9 (Centrale 2024)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On définit la fonction de répartition d'une variable aléatoire X notée $\mathrm{F_X}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F_X}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant x)$$

1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Montrer

$$\text{la fonction } \mathrm{F_X} \text{ croît et } \mathrm{F_X}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

Soit E une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ et soient X et $(\mathrm{X}_n)_n$ des variables aléatoires à valeurs dans E. On suppose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$$

2. Montrer $$\sum_{x\in\mathrm{E}} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

3. Montrer que la suite $(\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n})_n$ converge uniformément vers $\mathrm{F_X}$.

Corrigé : 1. Soit $x \leqslant y$. On a $\{\mathrm{X} \leqslant x\} \subset \{\mathrm{X} \leqslant y\}$ d'où la croissance de $\mathrm{F_X}$ par croissance de $\mathbb{P}$. La fonction $\mathrm{F_X}$ est croissante bornée donc admet une limite finie en $+\infty$ par limite monotone. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F_X}(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{F_X}(n)$$

La famille $(\{\mathrm{X} \leqslant n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion d'où, par continuité croissante,

$$\mathrm{F_X}(n) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{X} \leqslant n\}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathbb{R}) = 1$$

On conclut $\boxed{\mathrm{F_X} \text{ croît et } \mathrm{F_X}(t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1}$

2. On note $\mathrm{E} = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ et on pose

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad p_{n,k} = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x_k) \quad \text{et} \quad p_k = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

Par propriété des sommes de termes positifs, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{x\in\mathrm{E}} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)| = \sum_{k\in\mathbb{N}} |p_{n,k} - p_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} |p_{n,k} - p_k|$$

On observe pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$

$$|p_{n,k} - p_k| = p_{n,k} + p_k - 2u_k(n) \quad \text{avec} \quad u_k(n) = \min(p_{n,k}, p_k)$$

Chaque terme est un terme de série convergence et il vient par linéarité du symbole somme

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} |p_{n,k} - p_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k} + \sum_{k=0}^{+\infty} p_k - 2\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n)$$

On a $$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad 0 \leqslant u_k(n) \leqslant p_k$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $\sum u_k$. Comme on a $u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient par double limite

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$$

On conclut $$\boxed{\sum_{x\in\mathrm{E}} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

3. Soit $y \in \mathrm{E}$. Par linéarité du symbole somme et inégalité triangulaire pour des familles sommables, il vient

$$\begin{aligned}
|\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(y) - \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(y)| &= \left| \sum_{x\in\mathrm{E},\, x\leqslant y} \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \sum_{x\in\mathrm{E},\, x\leqslant y} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \right| \\
&= \left| \sum_{x\in\mathrm{E},\, x\leqslant y} (\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)) \right| \leqslant \sum_{x\in\mathrm{E}, x\leqslant y} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)|
\end{aligned}$$

d'où $$\|\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n} - \mathrm{F}_{\mathrm{X}}\|_\infty \leqslant \sum_{x\in\mathrm{E}} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)|$$

Ainsi $$\boxed{\|\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n} - \mathrm{F}_{\mathrm{X}}\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$