ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

# Préparation à l'oral - Feuille n°4

## Exercice 1 (CCINP 2024)

Soit E un $\mathbb{R}$-evn et A une partie non vide de E.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de l'adhérence $\bar{\mathrm{A}}$.
   (b) Prouver que A est convexe, alors $\bar{\mathrm{A}}$ convexe.
2. On pose $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}_{\mathrm{A}}(x) = \operatorname*{Inf}_{a \in \mathrm{A}} \|x - a\|$$
   (a) Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrer $\qquad \mathrm{d}_{\mathrm{A}}(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \bar{\mathrm{A}}$
   (b) On suppose que A est fermée et que la fonction $\mathrm{d}_{\mathrm{A}}$ est convexe. Montrer que A est convexe.

## Exercice 2 (CCINP 2024)

On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Établir $$\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   où $\alpha$ est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

## Exercice 3 (CCINP 2024)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base $(v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. On précisera les valeurs de $a$, $b$ et $c$.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

## Exercice 4 (Mines 2024)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{E}_n)_n$ une suite d'événements. On pose $\mathrm{Z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathrm{E}_n}$.

1. Justifier que Z est une variable aléatoire discrète.
2. On suppose $\sum \mathbb{P}(\mathrm{E}_n)$ convergente. Montrer que Z est d'espérance finie puis calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$.

## Exercice 5 (Mines 2024)

Soit $n$ entier non nul. Déterminer et dénombrer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

## Exercice 6 (Navale 2024)

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{n}$ converge.

## Exercice 7 (Centrale 2024)

On note
$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[ \qquad \omega(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. On pose
$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

et
$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'' + (2\mathrm{X}+1)\mathrm{P}'$$

1. Montrer que $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.
3. (a) Déterminer $\mathrm{Sp}\,(\varphi)$.
   (b) Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ admet une base de vecteurs propres échelonnés en degré.

## Exercice 8 (Centrale 2024)

1. Rappeler l'équivalent de Stirling.
2. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.
3. On pose
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de F.
   (b) Développer F en série entière sur un voisinage de zéro.
   (c) Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \to 1$.

## Exercice 9 (ENS 2024)

Soit $\mathrm{A} = \mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C}^)$. On pose
$$\forall (f,g) \in \mathrm{A}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

1. Montrer que le triplet $(\mathrm{A}, +, \star)$ est un anneau commutatif intègre.
2. Déterminer $\mathrm{U}(\mathrm{A})$.
3. Soient $a$, $b$, $c$ dans A avec $a$ et $b^{\star 2} - 4a \star c$ inversibles. Résoudre l'équation
$$a \star x^{\star 2} + b \star x + c = 0$$
   d'inconnue $x \in \mathrm{A}$.