Exercice 1 (Navale 2018)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$\mathrm{A} \text{ diagonalisable } \iff \mathrm{A} - \mathrm{A}^{-1} \text{ diagonalisable}$$

2. Écrire un programme en langage python permettant de simuler une loi géométrique de paramètre $p \in \,]\,0\,;1\,[$.

Corrigé : 1. Le sens direct est immédiat. On suppose $\mathrm{A} - \mathrm{A}^{-1}$ diagonalisable. On note v l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathrm{A} - \mathrm{A}^{-1}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à u. Les endomorphismes commutent clairement. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(v)$ et u_λ induit par u sur $\mathrm{E}_\lambda(u)$.

On a
$$u_\lambda^2 - \lambda u_\lambda - \mathrm{id} = 0$$

Le polynôme $\mathrm{X}^2 - \lambda \mathrm{X} - 1$ est annulateur de u_λ et scindé à racines simples car de discriminant > 0. Ceci prouve que l'induit u_λ est diagonalisable. On peut donc choisir une base $\mathscr{B}_\lambda$ de vecteurs propres de u_λ et la concaténation $\biguplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(v)} \mathscr{B}_\lambda$ forme une base de vecteurs propres de u. On conclut

$$\boxed{\mathrm{A} \text{ diagonalisable } \iff \mathrm{A} - \mathrm{A}^{-1} \text{ diagonalisable}}$$

2. On saisit

```
def geom(p):
    res=1
    while ber(p)==0:
        res+=1
    return res
```

Exercice 2 (Mines 2023)

1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $a_1, \ldots, a_n$ des réels vérifiant $a_1 < \ldots < a_n$ et la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{a_k x}$. On suppose que la fonction f s'annule n fois. Montrer $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
2. Soient $b_1, \ldots, b_n$ des réels vérifiant $b_1 < \ldots < b_n$ et $\mathrm{A} = \left(\mathrm{e}^{a_i b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que la matrice A est inversible.
3. Établir
$$\det(\mathrm{A}) > 0$$

Corrigé : 1. On procède par récurrence. La propriété est immédiate pour $n = 1$. On la suppose vraie pour n entier non nul fixé. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels avec $a_1 < \ldots < a_{n+1}$ tels que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \mathrm{e}^{a_k x}$ s'annule $n+1$ fois. Si $\lambda_{n+1} = 0$, c'est immédiat par hypothèse de récurrence. Supposons $\lambda_{n+1} \neq 0$. On a pour x réel

$$f(x) = 0 \iff \lambda_{n+1} \mathrm{e}^{a_{n+1} x} g(x) = 0 \quad \text{avec} \quad g(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}} \mathrm{e}^{(a_k - a_{n+1})x}$$

Par conséquent, la fonction g s'annule $n+1$ fois et d'après le théorème de Rolle, la fonction g' s'annule n fois avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \mathrm{e}^{b_k x} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mu_k = (a_k - a_{n+1}) \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}, \quad b_k = a_k - a_{n+1}$$

On a $b_1 < \ldots < b_n$ et par hypothèse de récurrence, on en déduit la nullité de μ_k et donc des λ_k pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ et le résultat suit. On conclut

$$\boxed{\text{L'hypothèse faite sur la fonction } f \text{ implique } \lambda_1 = \ldots = \lambda_n.}$$

2. On écrit une combinaison linéaire nulles de lignes de A qui donne

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{a_k b_j} = 0$$

avec les λ_k réels. Ainsi, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{a_k x}$ s'annule n fois d'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. La famille des lignes est donc libre et on conclut

$$\boxed{\text{La matrice A est inversible.}}$$

3. On choisit $b_j = j-1$ pour tout $j \in [\![1\,;\, n]\!]$. Alors, la matrice A est une matrice de Vandermonde et on trouve

$$\det(\mathrm{A}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\mathrm{e}^{a_j} - \mathrm{e}^{a_i}) > 0$$

On pose
$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < \ldots < x_n\}$$

Il s'agit d'un convexe de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, l'image de Δ connexe par arcs par l'application continue $\varphi : (b_1, \ldots, b_n) \mapsto \det \left(\mathrm{e}^{a_i b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. C'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas zéro d'après la question précédente. Le cas particulier précédent montre que $\operatorname{Im} \varphi \cap \,]\,0\,;+\infty\,[\, \neq \varnothing$ et par conséquent $\operatorname{Im} \varphi \subset \,]\,0\,;+\infty\,[$ et on conclut

$$\boxed{\det(\mathrm{A}) > 0}$$

Exercice 3 (Mines 2022)

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in \left]0\,;1\right[$. On note $\mathrm{M}_n = \operatorname{Max}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$. Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{M}_n}{\ln(n)} - \ell\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Corrigé : On note $q = 1-p$. Soit k entier non nul. On a par indépendance des X_i

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}_n \leqslant k)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\mathrm{X}_i \leqslant k\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i \leqslant k)$$

puis par égalité en loi

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_i \leqslant k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\ell=1}^{k} \{\mathrm{X}_i = \ell\}\right) = \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = \ell) = \sum_{\ell=1}^{k} pq^{\ell-1} = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k$$

et la formule vaut aussi pour $k = 0$. Ainsi, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{M}_n \leqslant k) = (1-q^k)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{M}_n > k) = 1 - (1-q^k)^n$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a pour $n \geqslant 2$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{M}_n}{\ln(n)} - \ell\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}(\mathrm{M}_n \geqslant (\ell+\varepsilon)\ln(n)) + \mathbb{P}(\mathrm{M}_n \leqslant (\ell-\varepsilon)\ln(n))$$

On note $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = \mathbb{P}(\mathrm{M}_n \leqslant (\ell-\varepsilon)\ln(n)) \quad \text{et} \quad b_n = \mathbb{P}(\mathrm{M}_n \geqslant (\ell+\varepsilon)\ln(n))$

Soit n entier non nul. Par croissance de la partie entière, on a

$$\{\mathrm{M}_n \leqslant (\ell-\varepsilon)\ln(n)\} = \{\mathrm{M}_n \leqslant \lfloor(\ell-\varepsilon)\ln(n)\rfloor\}$$

d'où
$$a_n = (1 - q^{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln(n)\rfloor})^n$$

On choisira ℓ et ε de sorte que $\ell - \varepsilon > 0$ car si on a $\ell - \varepsilon \leqslant 0$, l'événement $\{\mathrm{M}_n \leqslant (\ell-\varepsilon)\ln\}$ est impossible. On a $\ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ d'où $\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln(n)\rfloor \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et comme $q < 1$, il s'ensuit

$$a_n = \exp\left(n \ln\left(1 - q^{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln(n)\rfloor}\right)\right) \quad \text{avec} \quad q^{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln(n)\rfloor} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puis
$$\begin{aligned} n\ln\left(1 - q^{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln(n)\rfloor}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} -nq^{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln(n)\rfloor} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\exp\left(\ln(n) + \lfloor(\ell-\varepsilon)\ln(n)\rfloor \ln(q)\right) \end{aligned}$$

Or, on a
$$1 + \frac{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln(n)\rfloor \ln(q)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + (\ell-\varepsilon)\ln(q)$$

On souhaiterait que cette limite soit > 0 pour tout $\varepsilon > 0$. On choisit $\ell = -\dfrac{1}{\ln(q)}$ ce qui garantit $\ell > 0$ et rend possible $\ell - \varepsilon > 0$ pourvu que ε soit pris assez petit. Ainsi

$$\ln(n) + \lfloor(\ell-\varepsilon)\ln(n)\rfloor \ln(q) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

et par conséquent
$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ensuite, on a
$$\{\mathrm{M}_n \geqslant (\ell+\varepsilon)\ln(n)\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathrm{X}_i \geqslant (\ell+\varepsilon)\ln(n)\}$$

Par inégalité de Boole et égalité en loi des X_i, il s'ensuit

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}_n \geqslant (\ell+\varepsilon)\ln(n)) \leqslant n\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant (\ell+\varepsilon)\ln(n))$$

Par croissance de la partie entière supérieure, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant (\ell+\varepsilon)\ln(n)) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant \lceil(\ell+\varepsilon)\ln(n)\rceil) = 1-(1-q^{\lceil(\ell+\varepsilon)\ln(n)\rceil-1})^n$$

On a $$(1-q^{\lceil\ell+\varepsilon)\ln(n)\rceil-1})^n = \exp\left(n\ln\left(1-q^{\lceil(\ell+\varepsilon)\ln(n)\rceil-1}\right)\right)$$

avec
$$\begin{aligned} n\ln\left(1-q^{\lceil(\ell+\varepsilon)\ln(n)\rceil-1}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} -nq^{\lceil(\ell+\varepsilon)\ln(n)\rceil-1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(-\ln(n)+(\lceil(\ell+\varepsilon)\ln(n)\rceil-1)\ln(q)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(\ln(n)(\varepsilon\ln(q)+\mathrm{o}(1))\right) \end{aligned}$$

On en déduit $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et on conclut

$$\boxed{\forall\varepsilon>0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{M}_n}{\ln(n)}+\frac{1}{\ln(q)}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 4 (Centrale 2019)

Soit n entier non nul et $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

1. Montrer $\qquad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$

2. On fixe $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathrm{M}) = 2\mathrm{M} - \mathrm{MAM}$$

On définit la suite $(\mathrm{M}_k)_k$ par $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{M}_{k+1} = f(\mathrm{M}_k)$ pour k entier. On suppose $\|\mathrm{I}_n - \mathrm{AM}_0\| < 1$.

(a) Montrer que la matrice A est inversible.

(b) Établir $\qquad \mathrm{M}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{A}^{-1}$

Corrigé : 1. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. On a $\|\mathrm{C}\|^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_{i,j}^2$ puis, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad c_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)$$

d'où
$$\|\mathrm{C}\|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\right]$$

Ainsi
$$\boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|}$$

2.(a) On pose $\mathrm{B} = \mathrm{I}_n - \mathrm{AM}_0$. Une récurrence immédiate permet d'établir $\|\mathrm{B}^k\| \leqslant \|\mathrm{B}\|^k$ pour tout k entier non nul. Il s'ensuit que la série $\sum \mathrm{B}^k$ converge absolument et par continuité du produit matriciel et téléscopage

$$(\mathrm{I}_n - \mathrm{B})\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{B}^k = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \left[\mathrm{B}^k - \mathrm{B}^{k+1}\right] = \mathrm{I}_n - \mathrm{B}^{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{I}_n = (\mathrm{I}_n - \mathrm{B})\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}^k$$

Ainsi
$$\mathrm{AM}_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}^k = \mathrm{I}_n$$

On conclut
$$\boxed{\text{La matrice A est inversible.}}$$

2.(b) On pose $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{C}_k = \mathrm{I}_n - \mathrm{AM}_k$

Soit k entier. On a

$$\mathrm{C}_{k+1} = \mathrm{I}_n - \mathrm{AM}_{k+1} = \mathrm{I}_n - \mathrm{A}(2\mathrm{M}_k - \mathrm{M}_k\mathrm{AM}_k) = (\mathrm{I}_n - \mathrm{AM}_k)^2$$

d'où
$$\|\mathrm{C}_{k+1}\| \leqslant \|\mathrm{C}_k\|^2$$

Le logarithme, sous réserve qu'il soit bien défini, donnerait une suite géométrique de raison 2. En suivant cette idée, on obtient par une récurrence immédiate

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{C}_k\| \leqslant \|\mathrm{C}_0\|^{2^k}$$

Comme $\|\mathrm{C}_0\| < 1$, il s'ensuit que $\mathrm{C}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{M}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{A}^{-1}}$$

Exercice 5 (CCINP 2021)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1. Montrer que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer la monotonie de la fonction S.
3. Montrer $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x+1) + \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x}$$

   En déduire un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to 0$.

Corrigé : 1. Soit $x > 0$. La série $\sum u_n(x)$ converge simplement d'après le critère des séries alternées puisque la suite $(|u_n(x)|)_n$ est décroissante de limite nulle. Les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Ainsi, pour $a > 0$ $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n'\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = \frac{1}{(n+a)^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $]\,0\,;+\infty\,[$ et comme la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]\,0\,;+\infty\,[$, on conclut

$$\boxed{\text{La somme S est bien définie et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Par dérivation, il vient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Pour $x > 0$, la série $\sum u_n'(x)$ vérifie clairement le critère des séries alternées et sa somme est donc du même signe que son premier terme à savoir négatif. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction somme S décroît sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

3. Soit $x > 0$. Avec un changement d'indice, il vient

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x+1} = \frac{1}{x} - \mathrm{S}(x+1)$$

Ainsi $$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x+1) + \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x}}$$

Par continuité, on a $$\mathrm{S}(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{S}(1) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit $$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}}$$

Exercice 6 (CCINP 2023)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ muni de la norme définie par $\|\mathrm{P}\| = \operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$ avec $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$. Pour $b \in \mathbb{C}$, on pose

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(b)$$

1. Montrer que l'application $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Établir que si $|b| < 1$, alors l'application f est continue.
3. Étudier la continuité de f si $|b| = 1$. On pourra considérer $\mathrm{P}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \bar{b}^k \mathrm{X}^k$ pour n entier.
4. Montrer que si $|b| > 1$, alors l'application f n'est pas continue.

Corrigé : 1. Immédiat.

2. Supposons $|b| < 1$. Pour $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$, on a par inégalité triangulaire

$$|f(\mathrm{P})| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\, |b|^k \leqslant \|\mathrm{P}\| \sum_{k=0}^{n} |b|^k \quad \text{avec} \quad n = \deg \mathrm{P}$$

d'où
$$|f(\mathrm{P})| \leqslant \|\mathrm{P}\| \frac{1 - |b|^{n+1}}{1 - |b|} \leqslant \|\mathrm{P}\| \frac{1}{1 - |b|}$$

ce qui prouve le caractère lipschitzien en zéro et donc la continuité de f. Supposons $|b| \geqslant 1$. On pose $\mathrm{P}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{\mathrm{X}}{b}\right)^k$ pour n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{P}_n\| = 1 \quad \text{et} \quad f(\mathrm{P}_n) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

On en déduit que f n'est pas continue. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est continue si et seulement si } |b| < 1.}$$

Exercice 7 (Mines-Telecom 2023)

Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q dans $]0\,;1[$. On note $\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$.

1. Montrer que $\mathrm{Z} \leqslant \mathrm{X}$. En déduire que Z est d'espérance finie et déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$.
2. Déterminer la loi de Z.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ d'où $0 \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^1$, il s'ensuit que Z est d'espérance finie. Les variables X et $\dfrac{1}{\mathrm{Y}}$ sont indépendantes dans L^1 notamment car $0 \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{Y}} \leqslant 1$ et il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{Y}}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}q(1-q)^{k-1}$$

On a $$\forall x \in\,]-1\,;1[\qquad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{Z} \in \mathrm{L}^1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\mathrm{Z}) = -\frac{q}{p(1-q)}\ln(q)}$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ avec $a \wedge b = 1$. D'après le lemme de Gauss, il vient

$$\left\{\mathrm{Z} = \frac{a}{b}\right\} = \{b\mathrm{X} = a\mathrm{Y}\} = \{\mathrm{X} \in a\mathbb{N}^*, \mathrm{Y} \in b\mathbb{N}^*, b\mathrm{X} = a\mathrm{Y}\} = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}\{\mathrm{X} = ak, \mathrm{Y} = bk\}$$

Ainsi, par σ-additivité et indépendance de X et Y, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z} = a/b) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X} = ak, \mathrm{Y} = bk) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X} = ak)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = bk) = \sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{ak-1}q(1-q)^{bk-1}$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{Z} = a/b) = \frac{pq(1-p)^{a-1}(1-q)^{b-1}}{1-(1-p)^a(1-q)^b}}$$

Exercice 8 (Mines-Telecom 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé de dimension finie et soit $(u_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la suite $(\|u_n - x\|)_n$ converge.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

Corrigé : 1. La suite $(\|u_n\|_n)$ est convergente donc bornée. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans une boule fermée $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ avec $\mathrm{R} \geqslant 0$ qui est un fermé borné dans un espace de dimension finie et est donc compacte. Par conséquent

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ admet une valeur d'adhérence.}}$$

2. Soit φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathrm{E}$. Par hypothèse, on dispose de $c \geqslant 0$ tel que

$$\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$

Par extraction, il vient
$$\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$

et on déduit $c = 0$ par unicité de la limite. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge.}}$$

Exercice 9 (Mines-Telecom 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

1. Montrer que $\dim \mathrm{E}$ est paire.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(x, f(x))$ est stable par f pour tout $x \in \mathrm{E}$.
3. On suppose $\dim \mathrm{E} = 2n$ avec n entier non nul. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de E tels que $\mathscr{B} = (e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$ est une base de E et préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$.

Corrigé : 1. On a $$\det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\mathrm{id}) = (-1)^{\dim \mathrm{E}}$$

Comme un réel au carré est positif, on conclut

$$\boxed{\text{La dimension de E est paire.}}$$

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Pour α, β réels, il vient

$$f(\alpha x + \beta f(x)) = \alpha f(x) - \beta x \in \mathrm{Vect}\,(x, f(x))$$

Ainsi $$\boxed{\text{Pour } x \in \mathrm{E}, \text{ le sev } \mathrm{Vect}\,(x, f(x)) \text{ est stable par } f.}$$

3. On construit la suite $(e_1, \ldots, e_n)$ par récurrence. On choisit $e_1 \neq 0_\mathrm{E}$. Supposons $(e_1, f(e_1))$ liée. Comme le vecteur e_1 n'est pas nul, on a $f(e_1)$ colinéaire à e_1 ce qui signifie e_1 vecteur propre de f et qui est absurde puisque le spectre réel de f est vide, le polynôme $\mathrm{X}^2 + 1$ étant annulateur de f. On suppose avoir construit $(e_1, f(e_1), \ldots, e_k, f(e_k))$ famille libre avec $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. On complète cette famille en $(e_1, f(e_1), \ldots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ famille libre de E. Montrons la liberté de $(e_1, f(e_1), \ldots, e_{k+1}, f(e_{k+1}))$. Soient $(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2(k+1)}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i)) = 0_\mathrm{E}$. Si $\beta_{k+1} = 0$, on a par hypothèse $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\, k+1]\!]$ et $\beta_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\, k]\!]$. Supposons $\beta_{k+1} \neq 0$. Il vient

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i))\right) = \sum_{i=1}^{k+1} (-\beta_i e_i + \alpha_i f(e_i)) = 0_\mathrm{E}$$

On note $r = \dfrac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}}$ et on écrit la combinaison

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-\beta_i e_i + \alpha_i f(e_i)) - r \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i)) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} [(-\beta_i - r\alpha_i)\, e_i + (\alpha_i - r\beta_i)\, f(e_i)] - (\beta_{k+1} - r\alpha_{k+1})\, e_{k+1} = 0_\mathrm{E}$$

Par liberté de $(e_1, f(e_1), \ldots, e_{k+1})$, il vient

$$\forall i \in [\![1\,;\, k]\!] \qquad \begin{cases} \beta_i + r\alpha_i = 0 \\ \alpha_i - r\beta_i = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \beta_{k+1}^2 + \alpha_{k+1}^2 = 0$$

d'où $$\forall i \in [\![1\,;\, k]\!] \qquad \alpha_i(1 + r^2) = \beta_i(1 + r^2) = 0 \quad \text{et} \quad \beta_{k+1} = \alpha_{k+1} = 0$$

et on en déduit la nullité de tous les coefficients. On construit alors la suite $(e_1, \ldots, e_n)$ selon le procédé décrit ci-avant. La famille $(e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$ est libre de cardinal égal à $\dim \mathrm{E}$. Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe une base de E de la forme } \mathscr{B} = (e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n)) \\ \text{avec les } e_i \text{ dans E et } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \mathrm{diag}(\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}) \text{ avec } \mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right). \end{array}}$$

Exercice 10 (Mines 2023)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ i+j=n} \frac{1}{i^2 j^2}$$

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ et calculer sa somme S.
3. Étudier la définition et continuité de S en R et $-$R.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On a
$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2}$$
Par décomposition en éléments simples, il vient pour $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$
$$\frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right]$$
puis $$\frac{1}{k^2(n-k)^2} = \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{k^2} + \frac{2}{k(n-k)} + \frac{1}{(n-k)^2}\right]$$
Avec des changements d'indices et la décomposition en éléments simples précédente, on obtient
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n-k)} \\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right] = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{4}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \end{aligned}$$
Par comparaison série/intégrale avec la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ continue par morceaux sur $[\,1\,;+\infty\,[$ décroissante positive, il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et par conséquent
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n^2}\left(\frac{\pi^2}{6} + \mathrm{o}(1)\right) + \frac{4\ln n}{n^3}\,(1+\mathrm{o}(1))$$
Ainsi $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{3n^2}}$$

2. Les séries entières $\sum z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$ ont même rayon de convergence égal à 1 et par conservation du rayon de convergence pour le critère des équivalents, il vient

$$\boxed{\text{La série entière } \textstyle\sum u_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } \mathrm{R} = 1.}$$

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

D'après le produit de Cauchy de séries entières, il vient pour $x \in \,]-1\,;1\,[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\right)^2$$

Pour $x \in \,]-1\,;1\,[\smallsetminus \{0\}$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$

et par intégration de série entière, la formule valant aussi pour $x = 0$

$$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \left(\int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

3. On a $\displaystyle |u_n(-1)^n| = u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{3n^2}$

Ainsi, les séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n$ convergent et d'après le théorème d'Abel radial, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction somme S est bien définie et continue sur } [-1\,;1\,].}$$