Centrale - BEOS 8499

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour tout $A \in E$, on pose $||A|| = \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|$.

1. (a) Montrer que $||.||$ est une norme d'algèbre sur E.
   (b) Donner la définition de e^A ainsi que le type de convergence.
   (c) Montrer qu'on a alors $||\mathrm{e}^A|| \leq \mathrm{e}^{||A||}$.
2. Montrer que
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ ||A^n - B^n|| \leq nK^{n-1}||A - B||$$
   où $K = \max(||A||, ||B||)$.
3. Existence et calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} (\exp(A/n)\exp(B/n))^n$.

Centrale - BEOS 8448

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que tout hyperplan de E est de la forme $(\mathrm{Vect}(a))^\perp$, avec a un vecteur non ul de E.
2. On suppose qu'il existe $x_1, \cdots, x_{n+1}$ des vecteurs unitaires de E tels que
$$\forall i, j \in [\![1, n+1]\!],\ i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j\rangle = \alpha$$
   avec $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$. Quelle est la valeur de α ?
3. Montrer que l'on peut effectivement trouver $n+1$ vecteurs de E vérifiant les hypothèses de la question précédente.

Centrale - BEOS 8099

On travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $_C$. On note $\tilde{A} = \mathrm{Com}(A)^T$.

1. Montrer que $A\tilde{A} = \det(A)I_n$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(AB).$$
3. On note $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A + \tilde{A} \in \mathbb{C}I_n\}$.
   Montrer que si $A \in \mathcal{S}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à A, alors $B \in \mathcal{S}$.
   Déterminer les matrices de $\mathcal{S}$.

Centrale - BEOS 7116

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et on note $E^\star$ son dual, *i.e.* l'espace des formes linéaires sur E (à valeurs dans $\mathbb{C}$).
On se donne $A \subset \mathcal{L}(E)$. On dit que A est trigonalisable s'il existe une base de trigonalisation commune à tous ses éléments. On suppose dans tout l'exercice que les éléments de A commutent deux à deux.

1. On définit, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application
$$^T u : \left\{ \begin{array}{lll} E^\star & \to & E^\star \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ u \end{array} \right.$$
   Montrer que $^T u \in \mathcal{L}(E)$.
2. Donner une contiion sur u et v de $\mathcal{L}(E)$ pour que $^T u$ et $^T v$ commutent.
3. Montrer que les endomorphismes de A admettent un vecteur propre commun.
4. En déduire que A est trigonalisable.