Centrale maths 1, semaine 2

Exercice 1 : convexité

Soit $\lambda \in]0,1[$ et $f, g, h : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continues telles que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

1. Rappeler la définition d'une fonction concave sur un intervalle et établir :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lambda a + (1-\lambda)b \geqslant a^\lambda b^{1-\lambda}.$$

2. On pose $\alpha = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\beta = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Vérifier que les fonctions suivantes réalisent des bijections de $[0,1]$ dans $[0,1]$:

$$\Phi : \theta \mapsto \frac{1}{\alpha}\int_0^\theta f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \Psi : \theta \mapsto \frac{1}{\beta}\int_0^\theta g(x)\,\mathrm{d}x$$

et montrer que la fonction $u = \lambda\Phi^{-1} + (1-\lambda)\Psi^{-1}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

3. En déduire l'inégalité :

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^\lambda \cdot \left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}.$$

Exercice 2 : probas

Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

1) Calculer $\mathbb{E}(e^{sS_n})$ pour tout réel $s > 0$.

2) Soit $a \geqslant 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant \exp\left(-n \sup_{s>0}\left(as - \ln\left(1-p+pe^s\right)\right)\right).$$

3) Montrer qu'il existe une fonction H de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait quel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-nH(\varepsilon)}.$$

Mines ponts : Calcul différentiel

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ *(avec préparation)*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$.

1) Montrer que f est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}f(x).(y-x) \leqslant f(y) - f(x).$$

2) Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. On pose

$$F = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f(a) = \alpha,\ f(b) = \beta\}.$$

Montrer que $\min\limits_{f \in F} \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ est atteint par une unique fonction affine de F.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ *(sans préparation)*

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X) = 10$ et $V(X) = 5$. Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 50 \Rightarrow P(10 - n < X < 10 + n) \geqslant 0.99.$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ *(sans préparation)*

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(|X|) = 0$. Montrer que X est presque-sûrement nulle, c'est-à-dire $P(|X| > 0) = 0$.

CCINP : réduction et série de fonctions

EXERCICE 73 algèbre

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

Exercice série de fonction :

(CCINP MP 2024 (donné avec le CCINP 73)) Soit $u_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.

1. Donner le développement en série entière de $\ln(1+t)$.
2. Montrer, avec le théorème d'intégration terme à terme, que

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$$

3. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+x)}$.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Déterminer u_n en fonction de f.
   (c) On admet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.
4. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $u_n = \frac{\pi^2}{12n} + \frac{\lambda}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
5. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ en fonction de λ tels que $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.