Exercice 1 : Exponentielle de matrice

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on note $E = \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$\forall A \in E, \|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|$$

1. **(a)** Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur E.

   (b) Donner la définition de e^A ainsi que le type de convergence.

   (c) Montrer qu'on a alors $\left\|\mathrm{e}^A\right\| \leqslant \mathrm{e}^{\|A\|}$.

2. Montrer que

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K}),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \|A^n - B^n\| \leqslant nK^{n-1}\,\|A-B\|$$

   où $K = \max(\|A\|, \|B\|)$.

3. Existence et calcul de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\exp\left(\dfrac{A}{n}\right)\exp\left(\dfrac{B}{n}\right)\right)^n$.

Exercice 2 : Équivalent d’une intégrale

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni de sa norme euclidienne $\|\cdot\|$.

1. Soit H un hyperplan de E, montrer que il existe $\vec{a} \in E$ tel que $H = \left(\mathrm{Vect}(\vec{a})\right)^{\perp}$.

2. Soit $\left(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_{n+1}}\right) \in E^{n+1}$ une famille de vecteurs unitaires, tel que :

$$\exists \alpha < 0 \quad \text{tel que} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots n+1\},\ i \neq j \Rightarrow \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \alpha$$

   Déterminer α.

3. Montrer qu'une telle famille existe.