CCINP - BEOS 7007

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$.

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
   (b) Trouver, d'une autre manière, la limite de (I_n).

IMT

Exercice 1 - BEOS 7855

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$/

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et admet une unique valeur propre réelle a. Montrer que $a > 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \sin(\pi a^n)$ converge.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$. Quelle est la loi de $Z = X + Y$?

IMT - BEOS 8461

Exercice 1

Soit $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto -A + \mathrm{Tr}(A) I_n$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le spectre de φ.
3. Montrer que $\ker(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Est-ce que φ est diagonalisable ?

Exercice 2

On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce selon la règle suivante :

- si on obtient "Face", on ajoute une boule noire dans l'urne ;
- si on obtient "Pile", on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers de la pièce.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Mines - BEOS 8354

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AMA^T$.

1. Montrer que $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ si et seulement si $(X_iY_j^T)_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{C})$ si et seulement si f_A est inversible.
3. Montrer que si A est diagonalisable, f_A l'est aussi.
4. Soit Y un vecteur propre de A. Montrer que $F = \{XY^T,\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\}$ est stable par f_A.
5. Montrer que si f_A est diagonalisable, A l'est aussi.

Mines - BEOS 8476

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boules fermées décroissantes pour l'inclusion.
Montrer que $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est une boule fermée.